UNIVERSITE DE CAEN
ANNEE 1996-1997

UFR DE SCIENCES ECONOMIQUES
ET DE GESTION

A ma petite famille, Sawsan et Edouar,

DEA
« MODELISATION MICROECONOMIQUE ET APPLICATION »
Option *Choix Social et Economie du Bien-Être*

LE PROBLEME DE MARCHANDAGE ET LES MODELES COOPERATIFS

MEMOIRE

PRESENTE PAR RADWAN JALAM,
SOUS LA DIRECTION DU PROFESSEUR MAURICE SALLES
ET DU MONSIEUR ZIAD

TABLE DES MATIERE

REMERCIEMENT.....7

INTRODUCTION.....8

CHAPITRE PREMIER.....11

LE PROBLEME DE MARCHANDAGE (DEFINITIONS PRELIMINAIRES).....

1.1 Introduction.....12
1.2 Le Problème de Marchandage.....12
1.3 Le Problème du Marchandage dans la Théorie Economique.....17
1.4 La Solution de Zeuthen.....18
1.4.1 Le Modèle.....19
1.5 La Menace dans le Marchandage.....20
1.6 Conclusion.....21

CHAPITRE II..... 23

LE MODELE DE MARCHANDAGE DE NASH.....

2.1 Introduction.....24
2.2 Le Problème de Marchandage Selon Nash.....24
2.2.1 Hypothèses.....25
2.2.2 Le Problème.....25
2.3. Le Modèle de Marchandage.....26
2.3.1 Le Modèle.....27
2.4. L'Analyse du Modèle Comme un Jeu Non-Coopératif.....27
2.4.1 Le Sous-Jeu de Demande.....28
2.4.2 Le Sous-Jeu de Menace.....31
2.4.3 Les Stratégies de Menace et Les Demandes Optimales.....33
2.4.4 Exemple.....36

2.5 Le Théorème Axiomatique.....38
2.5.1 Les Axiomes.....38
2.5.2 Commentaire.....39
2.6 Conclusion.....41

CHAPITRE III..... 43

LA SOLUTION GENERALISEE DE NASH POUR LES JEUX A DEUX JOUEURS AVEC INFORMATION INCOMPLETE.....

3.1 Introduction.....44
3.2 La Définition Du Problème de Marchandage à Information Incomplète.....44
3.2.1 Les Types de Joueurs et la Matrice de Probabilités *p*.....44
3.2.2 Les Types Actifs et Les Fonctions Conditionnelles de Paiement.....45
3.2.3 L'Ensemble des Accords.....46
3.3 Le Modèle de Marchandage.....47
3.3.1 Le Modèle.....47
3.4 L'Analyse du Modèle de Marchandage Comme un Jeu Non-Coopératif.....48
3.4.1 Les Gains Espérés.....49
3.4.2 Les Fonctions Semiconditionnelles de Paiement des Types Actifs.....50
3.4.3 Convertir le Jeu Γ à un Jeu Γ* Avec Information Complète.....51
3.4.4 Les Points d'Equilibre.....52
3.4.5 L'Ensemble d'Equilibre.....54
3.5 La Théorie Axiomatique.....55
3.5.1 Les Axiomes.....55
3.6. Conclusion.....57

CHAPITRE IV..... 59

D'AUTRES APPROCHES DU MARCHANDAGE.....

4.1 Introduction.....60
4.2 D'Autres Concepts de Solution.....60
4.2.1 La Solution Dictatoriale.....60
4.2.2 La Solution "discrète" de Raiffa.....61

4.2.3 La Solution de Kalai-Smorodinsky.....62
4.2.4 La Solution de Perles-Maschler.....63
4.2.5 La Solution Egalitaire.....65
4.3 Autres Approches, les Paramètres du Problème de Marchandage.....65
4.3.1 Le Rôle de l'Ensemble Réalisable.....66
4.3.2 Le Rôle du Point de Conflit.....67
4.3.2.1 La Monotonie du Point de Conflit.....68
4.3.2.2 L'Incertitude Sur le Point de Conflit.....69
4.4 Conclusion.....70
CONCLUSION.....71
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....74

Remerciements

Je remercie Emmanuel dont l'aide me fut précieuse pour corriger mon français et pour combler la différence entre ma formation en Syrie et ma formation en DEA.

Je remercie le Professeur M. SALLES qui a accepté de diriger mon mémoire. Je remercie monsieur ZIAD qui a accepté de lire les deux premiers chapitres et m'a donné de bons conseils.

Je remercie le Professeur OWEN qui m'a beaucoup aidé pour comprendre un article de NASH.

Enfin, je remercie tous les autres professeurs de DEA qui m'ont tous beaucoup appris par leurs cours.

Introduction

Dans les jeux à somme non nulles les possibilités de coopération apparaissent, mais les possibilités d'aboutir à un conflit sont également envisageables. Le prix, lorsqu'un conflit est atteint, est souvent exorbitant, et même parfois difficile à supporter. Une méthode efficace pour éviter de tels conflits est de faire des *concessions* mutuelles de la part des joueurs, ou du moins de la part de ceux dont la *sensibilité au risque* est relativement plus élevée.

Une concession implique implicitement une négociation, donc le problème entre les différents parties engagés revient à un problème de négociation ou encore à un problème de marchandage.

Le modèle typique du marchandage est celui concernant la division d'un franc entre deux joueurs ayant des préférences opposées et qui pourrait être généralisé pour une large catégorie de marchandage. Soit $\boldsymbol{B} = [0, 1]$ l'ensemble des accords possibles pour les deux joueurs, soit $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux offres tels que $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$, si pour le joueur 1 $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$, i.e., $\boldsymbol{a}$ est préféré à $\boldsymbol{b}$, alors pour le joueur 2 on aura forcement $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{a}$. La question que l'on est amené à se poser, et à laquelle il faut répondre, est comment partager ce franc.

L'idée que l'information précitée est insuffisante pour déterminer le point solution, i.e., le vecteur de gains unique qui exprime la valeur du jeu pour chaque joueur, est relativement ancienne.

La théorie économique orthodoxe et la théorie des jeux, telle qu'elle était développée par Von Neumann et Morgenstern, sont incapables à déterminer la

position exacte de ce point. "Les solutions et pérsolutions (le coeur, l'ensemble stable, et la fonction caractéristique) apportent seulement des prédictions prudentes et sans prétention sur les résultats, cependant, à de nombreuses occasions il est important d'avoir une solution particulière réduite à un point. Ceci est souhaitable non seulement pour la satisfaction intellectuelle de parvenir à une réponse claire et nette face à un problème complexe. C'est aussi souhaitable parce que de nombreuses application de la théorie des jeux semblent exiger une réponse sans équivoque, et débarrassée de toute hésitation d'ordre sociologique, au problème de la valeur effective de toute situation résultant du processus de compétition." (cf. Shubik, 1992 pp. 191)

L'objectif de ce travail est d'apporter une explication et une présentation du problème de marchandage et plus généralement des modèles coopératifs de marchandage. Après la présentation générale et l'introduction mathématique, ce mémoire passera en revue des modèles particuliers de la théorie coopérative du marchandage.

Le premier chapitre sera consacré à la présentation des définitions préliminaires, on y présente la définition d'un problème de marchandage et les définitions apparentées, puis on expose la relation avec la théorie économique, ensuite on présente le modèle de marchandage de Zeuthen qui est, en fait, mathématiquement équivalente du modèle connu de Nash, et enfin, à partir d'un exemple, on introduit la notion de "menace" qui jouera un rôle important dans la modélisation des problèmes de marchandage.

Le deuxième chapitre étudie le modèle de marchandage de Nash, Nash y propose deux moyens, complémentaires entre elles, pour déterminer la position du point de solution maximisant "le produit des gains".

Nash considère une certaine idéalisation de l'analyse, c'est pourquoi le troisième chapitre supprime, en généralisant l'analyse, une partie de cette idéalisation. Pour comprendre les cas avec information incomplète, Harsanyi et Selten proposent, en faisant appel à un grand nombre de notations spécifiques, une présentation systématique des jeux à information incomplète joués par des "types" de joueurs. Les joueurs peuvent manquer d'information à propos des résultats, des fonctions d'utilité ou de parties des espaces de stratégies. L'incertitude est traité au moyen d'une distribution jointe de probabilités subjectives qui est la même pour tous les joueurs au début du jeu.

Le quatrième chapitre aborde d'autre modifications en présentant les développement les plus récents. Ce chapitre passe en revue un nombre de solutions, à différents niveaux de détail. L'accent sera mis sur les solutions les plus facile à appliquer, mais la discussion se limitera, la plupart du temps, aux définitions et aux relations de base.

CHAPITRE PREMIER

LE PROBLEME DE MARCHANDAGE

(DEFINITIONS PRELIMINAIRES)

1.1 Introduction.

Ce chapitre présente l'ensemble des définitions préliminaires nécessaire pour entrer dans l'analyse des modèles coopératifs de marchandage. On présente d'abord la définition d'un problème de marchandage et les différentes définitions liées au problème. Puis on expose la contribution de la théorie économique concernant la détermination exacte du point de l'accord dans les "limites de négociation". Ensuite on présente le modèle de marchandage proposé par Zeuthen il y a deux décennies avant le modèle de Nash. Et enfin, on introduit la notion de la menace qui jouera ultérieurement un rôle important dans la construction des modèles.

1.2 Le Problème de Marchandage.

La théorie axiomatique du marchandage (bargaining) trouve ses origines dans l'article de Nash (1950). Dans cet article, Nash introduit une représentation idéale du problème du marchandage, et développe une méthodologie pour déterminer les termes de la négociation qui ont été proposés par Edgeworth en 1881 [Thomson (1995)]. Pour achever son travail Nash traite le problème du marchandage comme un *jeu à somme non nulle*. La motivation du travail axiomatique est que le coeur du jeu est très large [Moulin (1995)], donc le but est de sélectionner un point du coeur du jeu pour qu'il soit la solution.

Le problème canonique de la négociation est celui envisagé entre la direction et les ouvriers concernant la division des profits de la firme, un autre exemple est celui de la spécification de termes de commerce entre les partenaires commerciaux.

Le modèle formel et abstrait est le suivant: Deux agents (joueurs) peuvent accéder à n'importe quelle alternative parmi celles existantes dans *l'ensemble des alternatives réalisables (feasables)*. Leurs préférences sur cet ensemble ne sont pas identiques et pourtant elles ne sont pas parfaitement opposées. S'ils sont d'accord sur une alternative, ils la réalisent; sinon le jeu se termine avec une alternative prédéterminée à l'avance, appelée *le point de conflit*. L'ensemble réalisable et le point de conflit sont définis sur une *espace d'utilité* ; les utilités sont supposées *transférables* entre les joueurs, i.e., les valeurs numeriques qui représentent les utilités sont supposées transférables d'un joueur à l'autre.

Soient $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{d}$ l'ensemble réalisable et le point de désaccord respectivement, l'objectif de Nash est de développer un théorème qui pourrait aider à prédire le compromis que les joueurs peuvent réaliser. Il précise une *catégorie de problèmes* à laquelle il limite son analyse, et il définit une *solution* qui associe à chaque *problème de marchandage* $(\boldsymbol{B, d})$ dans cette catégorie un point unique interprété comme le *compromis*. Nash considère que cette solution devrait satisfaire certains *axiomes* intuitivement plausibles, puis il montre que la solution satisfaisant ces axiomes *existe* toujours et elle est *unique*. Après le travail de Nash, des auteurs ont développé et prolongé cette caractérisation axiomatique d'une solution.

Définition1: Le jeu. Un jeu $\boldsymbol{\Gamma}$ à n- personnes sous forme normale est défini par la donnée des éléments suivants:

- Un ensemble de joueurs (supposé fini), noté $N = \{1, 2, ..., n\}$.

- L'ensemble des stratégies possibles de chaque joueur i, noté $S_i = \{s_i\}$, $\forall\ i \in N$.

- La fonction de paiement du joueur *i* qui exprime le gain, ou l'utilité, que retire chaque joueur pour toutes les combinaisons de stratégies possibles. Pour le joueur *i* on a $U_i(s_1, s_2, ..., s_i, .., s_n)$.

Donc, $\Gamma = \{ N, (S_i), (U_i)\}, \forall\ i \in N.$ (1)

Définition2: Un jeu à somme non nulle. Un jeu est dit un jeu à *somme non nulle* si

$$\sum u_i \neq 0,\ \forall\ i \in N. \qquad (2)$$

Définition 3: Le problème de marchandage.

Un problème de marchandage à n-personne, ou simplement un problème, est une paire (***B, d***) où ***B*** est un sous-ensemble d'un espace Euclidien à n-dimensions, et ***d*** est un point de ***B.***

Chaque point de ***B*** est un *vecteur de paiement*, ses composantes représentent les niveaux d'utilité, mesurés en fonction *de l'utilité cardinale de Von Neumann-Morgenstern,* reçus des joueurs, i.e.,$\forall\ \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{I}} \in \boldsymbol{B}$, $\forall i \in N$ on a $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ...,x_i, ..., x_n)$. Soit T_i l'ensemble convexe et compact des stratégies mixtes $\boldsymbol{t}_i$ du joueur i, $\forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{x}$ est le résultat d'une combinaison $\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, ..., \boldsymbol{t}_i, ..., \boldsymbol{t}_n)$ de *stratégies mixtes* de *n*- joueurs.

Définition 4: La stratégie pure.

Une *stratégie pure* s_i du joueur *i* est un plan complet d'actions. Elle indique ce que ce joueur va jouer dans toutes les situations où il peut être amené à jouer.

[1] Les vecteurs, (et les profils de vecteurs) sont représentés par des lettres minuscules écrites en gras.

Définition 5: La stratégie mixte.

Une *stratégie mixte* $\boldsymbol{t}_i$ du joueur *i* est une distribution de probabilités sur l'ensemble des stratégies pures de ce joueur. Soit *m,* le nombre des stratégies pures, fini ; une stratégie mixte $\boldsymbol{t}_i$ de joueur *i* est un *m*- vecteur $\boldsymbol{t}_i = (t_{i1}, t_{i2},..., t_{im})$ tel que:

$$t_{im} \geq 0 \qquad (3)$$

$$\sum_{m=1}^{m} t_{im} = 1 \qquad (4)$$

Définition 6: La catégorie.

Soit Σ_d^n une *catégorie de problème* ***(B, d)*** telle que:

i) ***B*** est convexe, borné, et fermé..

ii) Il existe au moins un point dans ***B*** qui *domine strictement* ***d***, i.e., $\exists\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$ tel que $x_i > d_i\ \ \forall\ \ i \in N.$

Remarque 1. On dit que (***B, d***) est *d-compréhensif* si $\forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{d} \Rightarrow \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$.

Remarque 2. $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$,

i) $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{x}$ domine strictement $\boldsymbol{y}$) si $x_i > y_i,\ \forall\ i \in N.$

ii) $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{x}$ domine "faiblement" $\boldsymbol{y}$) si $x_i \geqq y_i,\ \forall\ i \in N.$

iii) $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{x}$ domine $\boldsymbol{y}$) si $x_i \geqq y_i$, et $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y},\ \forall\ i \in N.$

L'existence d'au moins un $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$ avec $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{d}$ est supposée pour éviter les cas où l'accord peut être seulement au profit de quelques joueurs. La convexité de ***B*** est due à la possibilité de tirages aléatoires (randomization); la borne se comprend si les utilités sont bornés, ***B*** est supposé fermé par commodité mathématique.[Thomson (1995)]

Définition 7: L'optimalité de pareto.

Un point $(v_1, v_2) \in \boldsymbol{B}$ est dit *optimal au sens de pareto* s'il est un point de *la frontière non dominée de* $\boldsymbol{B}$, (noté $\partial\boldsymbol{B}$), i.e.,

$$(v_1, v_2) \in \partial\boldsymbol{B} \equiv \{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \mid \nexists\, \boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{B} \text{ avec } \boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{x} \} \qquad (5)$$

Exemples.

Le figure1 représente différentes catégories de problèmes de marchandage avec $N = \{1, 2\}$. Dans (1-a) on présente un problème $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{d})$ d'une catégorie Σ_d^2,,ce problème *est strictement d-compréhensif*, i.e., il n'existe aucun segment dans $\partial\boldsymbol{B}$ parallèle à un des axes u_1 et u_2.

Le figure (1-b) montre une catégorie Σ_0^2 et un problème $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{d})$ *compréhensif*, i.e., il existe un segment dans $\partial\boldsymbol{B}$ parallèle à l'axe u_1, ici les coordonnées de $\boldsymbol{d}$ sont (0, 0).

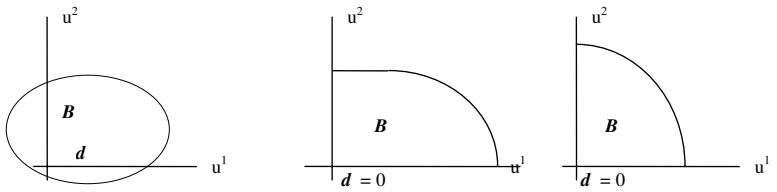


Figure 1. Différentes catégories de problèmes de marchandage

Le figure (1-c) montre un problème $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{d})$ *strictement compréhensif* d'une catégorie Σ_0^2, avec $\boldsymbol{d} = 0$.

Définition 8: La solution du problème.

Une *solution* du problème $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{d})$ est une fonction $f(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{d})$ qui associe pour ce problème un point unique $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{B}$ interprété comme le résultat recommandé, cette solution devrait vérifier certains axiomes, ainsi que les propriétés d'existence et d'unicité.

1.3 Le Problème du Marchandage dans la Théorie Economique.

Comment la théorie économique traite le problème du marchandage? Est-ce-que cette théorie est capable de déterminer la position exacte du point de l'accord? En suivant Harsanyi (1956) on peut dire que la théorie économique ordinaire (même avec l'aide de la théorie politique) est incapable de prédire les termes de l'accord dans le cas d'oligopole, de monopole bilatéral, et, en général, dans les situations où l'accord se fait par la négociation.

D'autre part, ce que la théorie orthodoxe peut dire dans de telles situations est que l'accord tombe dans certaines limites, appelés par Pigou les *"ranges of practicable bargains"*. Cet accord est défini par les deux propriétés suivantes:

1) il est dans la *courbe de contrat* d'Edgeworth, i.e., le lieu où l'amélioration de la position d'une partie entraîne la détérioration de la position de l'autre partie. Cette condition est connue dans la théorie des jeux coopératifs comme *la rationalité collective*.

2) il est entre les deux limites de cette courbe, ces limites représentent les '*points de concession maximale'* des parties ; chaque point de concession maximale représente le point où le gain net d'un accord sera versé entièrement au profit d'une partie. D'une manière générale, aucune partie n'accepte un accord qui la met dans une

situation pire que le point de conflit ; i.e., *la rationalité individuelle* est vérifiée [Friedman (1991)].

Ni la théorie économique ni la théorie des jeux, telle qu'elle était développée par Von Neumann et Morgenstern, n'étaient capables de déterminer la position exacte du point d'accord dans les limites des négociations possibles. C'est Seulement en introduisant de nouvelles hypothèses que la théorie des jeux fournie une solution [Harsanyi (1956.)].

L'indétermination du point d'accord n'est pas une loi naturelle, elle est un défaut dans la théorie économique. Dans la vie active, les hommes d'affaires, les politiciens, et les négociateurs sont capables de déterminer ce point s'ils possèdent un niveau suffisant d'informations sur les parties, leurs pouvoirs relatifs, et leurs compétences à négocier. La détermination de point d'accord et même la description de manière suffisante, des situations sociales, ne seront possibles qu'avec un théorème capable de prévoir le résultat de la négociation, c'est pourquoi plusieurs théorèmes ont tenté de remplir ce défaut.

1.4 La Solution de Zeuthen.

La publication des articles profondément novateurs de Nash au début des années 50 a brusquement augmenté l'intérêt de quelques économistes séduits par la théorie des jeux et qui se sont lancés dans des reconstructions rétrospectives. Harsanyi, parmi eux, rapproche le modèle de négociation de Nash d'analyses économiques qui débutent avec Zeuthen.

L'approche de Zeuthen (1930) s'appuie sur l'analyse du processus de la négociation dans le marché du travail, mais on peut le généraliser pour tous les problèmes du marchandage.

1.4.1 Le Modèle.

Soit $N = \{1, 2\}$ l'ensemble de joueurs, soient a_1, a_2 deux offres appartenant à l'ensemble des offres possibles A. Soient $u_1(a_1)$ et $u_1(a_2)$ les utilités du joueur 1 pour les offres a_1, a_2 respectivement, et $u_2(a_1)$ et $u_2(a_2)$ celles du joueur 2. Supposons que pour le joueur 1, $u_1(a_1) > u_1(a_2)$, et pour le joueur 2, $u_2(a_2) > u_2(a_1)$.

Si le joueur 2 commence par offrir a_2 au joueur 1, est-ce-que ce dernier accepte cette offre ou insiste-t-il pour avoir a_1? Zeuthen dit que la réponse dépend de p_2: la probabilité du joueur 2 de refuser l'offre a_1. Par conséquent, si le joueur 1 accepte l'offre a_2 il obtient $u_1(a_2)$ certainement, mais s'il la refuse et insiste pour a_1, il obtient $u_1(a_1)$ avec une probabilité de $(1 - p_2)$ et obtient zéro avec une probabilité de p_2. Comme le joueur 1 cherche à maximiser son utilité espérée, donc il va accepter l'offre a_2 si $u_1(a_2) > (1 - p_2).u_1(a_1)$, i.e., si $[u_1(a_1) - u_1(a_2)] / u_1(a_1) < p_2$, et il va refuser a_2 et insister pour a_1 dans le cas opposé.

Si on remplace le quotient $[u_1(a_1) - u_1(a_2)] / u_1(a_1)$ par $\Delta u_1/u_1$, on peut dire que $\Delta u_1 / u_1$ représente le risque maximum que le joueur 1 est prêt à supporter (i.e., la probabilité maximale du conflit). Par le même raisonnement, on peut en déduire que le risque maximum que le joueur 2 est prêt à supporter est $[u_2(a_2) - u_2(a_1)] / u_2(a_2)$, ou encore $\Delta u_2 / u_2$.

Ainsi, plus le quotient d'utilité d'un joueur augmente, plus sa capacité à imposer ses désirs augmente; et plus le quotient d'utilité d'un joueur diminue, plus sa

capacité à imposer ses désirs diminue. Zeuthen considère qu'un joueur fait une concession à son adversaire si sa capacité à souffrir du risque est inférieure à celle de son adversaire. Donc, le joueur 1 est prêt à faire une concession si :

$$[u_1(a_1) - u_1(a_2)] / u_1(a_1) < [u_2(a_2) - u_2(a_1)] / u_2(a_2) \qquad (6)$$

De même, le joueur 2 est prêt à présenter une concession dans le cas opposé. Une concession d'un joueur ne signifie pas une acceptation complète de l'offre de l'autre joueur, elle signifie simplement que le joueur est prêt à présenter une nouvelle offre qui lui garantisse d'inverser le signe de l'inégalité (1).

Si l'inégalité (1) devient une égalité, ça signifie que tous les deux font des concessions. Zeuthen considère que ce processus va continuer, pour un nombre limité d'étapes, jusqu'a ce que les joueurs s'entendent sur un point au milieu, mais sans détermination exacte de ce point.

L'intérêt du modèle de Zeuthen réside dans la possibilité d'en déduire la solution de Nash à partir de l'inégalité (1), Harsanyi montre que la solution de Zeuthen au problème du marchandage est mathématiquement équivalente à celle de Nash [Harsanyi (1956)].

1.5 La Menace dans le Marchandage.

Considérons cet exemple [Owen (1995)] : Un ouvrier peut choisir entre deux cas :

1) Soit de continuer le travail, et dans ce cas il gagne juste ce qu'il faut pour vivre, alors que son patron gagne 10 $.

2) Soit d'arrêter le travail, et dans ce cas il risque de mourir de faim, alors que son patron ne gagne rien.

Le joueur 1 (l'ouvrier) ne peut empêcher le joueur 2 (le patron) de gagner les 10$ qu'avec l'arrêt du travail, mais est-ce-que ce joueur est prêt à envisager ce cas très délicat? Est-ce-que le joueur 2 est prêt à partager son gain avec le joueur 1 si le joueur 1 menace d'arrêter le travail?

Il est évidant que la position du patron, dans ce problème de marchandage, est plus forte que celle de l'ouvrier, donc on peut penser que *la menace* d'arrêter le travail n'est pas *crédible* et que le joueur 1 va continuer le travail sauf s'il trouve d'autres *stratégies de menace* qui peuvent éliminer l'*asymétrie* du pouvoir, par exemple une stratégie de menace qui consiste à tuer le joueur 2 est plus crédible qu'une stratégie d'avoir faim (dans cet exemple on ne s'interroge pas sur la rationalité de l'action). On distingue deux sortes de menace, la menace variable et la menace fixe (ou constante).

Définition 9: La menace variable.

Un problème de marchandage accepte une *menace variable* si chaque joueur peut choisir rationnellement l'une des stratégies de menace possibles pour lui, et s'il peut s'engager pour la réaliser en cas de conflit, cette stratégie est appelée *stratégie de menace*.

Définition 10: La menace fixe.

Un problème de marchandage accepte une *menace fixe* s'il n'existe qu'un seul résultat en cas de conflit, par conséquant, le point de conflit sera prédéterminé à l'avance si les joueurs échouent pour trouver un compromis, i.e., le point de conflit ne dépend ni du choix des stratégies de menace, ni d'autres actions des joueurs.

1.6 Conclusion.

Ce chapitre avait pour l'objectif d'introduire le problème de marchandage et les définitions le concernant. Premièrement on présentait les définitions préliminaires. Puis on exposait la contribution de la théorie économique pour la détermination de la position exacte du point de solution entre les limites de négociation. Ensuite on abordait le modèle de Zeuthen et enfin on introduisait la notion de "menace".

Dans le deuxième chapitre on étudiera le modèle de marchandage de Nash, puis on présentera les deux méthodes proposées pour la sélection du point de solution, en présentant l'ensemble des hypothèses et l'analyse du modèle comme un "jeu" non coopératif, et enfin on passera en revue les critiques concernant l'analyse de Nash.

CHAPITRE II

LE MODELE DE MARCHANDAGE DE NASH

2.1 Introduction.

Nash (1950 ; 1953) propose, en passant d'une certaine idéalisation, deux moyennes complémentaires pour la détermination du point de solution concernant le problème de marchandage : le modèle de négociation et le théorème axiomatique, il montre que les solutions proposées par les deux méthodes sont les mêmes, et que cette solution est le point qui maximise "le produit des gains". Dans ce chapitre on présentera le travail de Nash en quatre étapes. D'abord, on donnera sa *définition* du problème de marchandage. Puis, on présentera le *modèle* du marchandage. Ensuite, on montera *l'analyse du modèle comme un jeu non coopératif*. Et enfin, on exposera le *théorème axiomatique*.

2.2 Le Problème de Marchandage Selon Nash.

Nash considère le problème du marchandage comme un jeu à deux joueurs à somme non nulle, Nash suppose que les intérêts des joueurs ne sont pas identiques et qu'ils ne sont pas parfaitement opposées. En d'autres termes, le conflit entre les deux joueurs est un *conflit partiel* puisque les joueurs peuvent accéder à un compromis. Nash étudie le cas où un joueur ne peut affecter le bien-être de l'autre joueur sans le consensus de ce dernier.

L'objectif de Nash, dans ses articles de 1950 et 1953, est de présenter une étude théorique du problème du marchandage, en faisant une *idéalisation* du problème, afin de définir une solution. La solution selon Nash est une fonction qui mesure le montant maximum qu'un joueur est prêt à laisser ou bien le montant minimal qu'il est prêt à accepter comme un prix de la coopération [Owen (1995)].

2.2.1 Hypothèses.

Nash considère plusieurs hypothèses nécessaires pour l'analyse du problème:

- Le jeu est à deux personne et à somme non nulle.
- Les joueurs sont supposés rationnels, i.e., ils se comportent de façon cohérente et ne commettent pas d'erreurs logiques dans leurs choix.
- Chaque joueur est capable de comparer ses désires entre les différents biens.
- Les joueurs sont symétriques, i.e., leurs compétences à négocier sont identiques, (dans l'article de 1953, Nash modifie cette hypothèse).
- L'existence d'un paiement latéral n'est pas supposé.
- Les joueurs disposent d'une information complète.

Définition 1 : ***L'information complète.***

Un jeu est *à information complète* si chaque joueur connaît la *structure* du jeu, i.e., l'ensemble des joueurs, la règle du jeu, et les fonctions de paiement des différents joueurs.

Remarque : Si chaque joueur sait que les autres joueurs ont une information complète, l'information complète est de *connaissance commune*.

2.2.2 Le Problème.

Le problème du marchandage, selon Nash, est défini comme une paire $(\boldsymbol{B}, (a, b))$. Il suppose que les joueurs peuvent accéder à n'importe quelle alternative de $\boldsymbol{B}$. L'ensemble $\boldsymbol{B}$ est supposé convexe et compact.[2] La *convexité* de $\boldsymbol{B}$ nous dit que $\forall \boldsymbol{x}$

[2] la condition de compacité n'est pas indispensable (Owen; 1997).

et $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$, tous les points entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ appartiennent à $\boldsymbol{B}$, i.e., $(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda).\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{B}$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$. Cette propriété de $\boldsymbol{B}$ nous permet d'obtenir n'importe quel point entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ par une distribution de probabilités sur les deux points**.** La convexité de $\boldsymbol{B}$ nous dit aussi que la solution du problème existe toujours. La compacité de $\boldsymbol{B}$ nous permet de dire que les points, dans cet ensemble, sont bornés et que la fonction d'utilité, si elle est continue sur l'ensemble, assigne toujours un point *maximum* appartenant à cet ensemble.

Le point (a, b) est appelé le point de conflit, ce point représente les utilités que les joueurs auront s'ils ne peuvent se mettre d'accord, ce point est disponible pour les deux joueurs, i.e., $(a, b) \in \boldsymbol{B}$**.** Chaque joueur dispose d'un ensemble T_i de stratégies mixtes, cet ensemble est supposé compact et convexe. Chaque point de $\boldsymbol{B}$ est obtenu par une combinaison des stratégies mixtes des joueurs, un point $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{B}$ est un vecteur d'utilité, ses composantes représentent les utilités u_1 et u_2 reçues par les joueurs 1 et 2.

2.3. Le Modèle de Marchandage:

La menace joue un rôle important dans le processus du marchandage, la solution du problème ne donne pas seulement la valeur du jeu mais elle détermine aussi quelle menace les joueurs doivent utiliser. Le processus de menaces est le suivant:

Le joueur 1 menace le joueur 2 en le convaincant qu'il utilisera une certaine stratégie une fois que ce dernier n'agit pas conformément à la demande de joueur 1. Pour que la menace réussisse il est essentiel qu'elle soit *crédible*. Une menace est dite crédible si le joueur menaçant est capable à mettre sa menace à exécution, sinon la

menace n'aurait aucun sens. Nash suppose que les joueurs ne peuvent pas communiquer avant d'entrer dans le processus de marchandage.

2.3.1 Le Modèle.

Le modèle du marchandage de Nash consiste en quatre phases:

1: Le joueur 1 choisit une stratégie mixte $\boldsymbol{t}_1$ comme sa stratégie de menace, le joueur 2, sans connaître la stratégie $\boldsymbol{t}_1$, lui aussi choisit une stratégie de menace $\boldsymbol{t}_2$. Si les joueurs n'arrivent pas à se mettre d'accord ils *doivent* utiliser leurs stratégies $\boldsymbol{t}_1$ et $\boldsymbol{t}_2$, i.e., si leurs demandes sont incompatibles.

2: Les deux joueurs annoncent leurs stratégies $\boldsymbol{t}_1$ et $\boldsymbol{t}_2$.

3: Les joueurs jouent *indépendamment* en choisissant leurs demandes d_1 et d_2.

4: Les gains sont maintenant déterminés, si les joueurs choisissent un point $(u_1, u_2) \in \boldsymbol{B}$ tel que $u_1 \geq d_1$ et $u_2 \geq d_2$ ils reçoivent leurs demandes d_1 et d_2, sinon ils reçoivent $P_1(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2)$ et $P_2(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2)$, i.e., les gains correspondant aux stratégies de menace.

Une mécanisme qui oblige les joueurs à respecter leurs menaces et leurs demandes est nécessairement indispensable afin d'éviter les menaces non crédibles.

Dans la phase 3, Nash considère qu'il est essentiel que les joueurs agissent indépendamment et sans aucune communication entre eux. Les phases 2 et 4 ne contiennent aucune décision, seulement les phases 1 et 3 comprennent des décisions.

Le fait de donner aux joueurs leurs demandes d_1 et d_2 (et pas u_1, u_2 en cas de demandes compatibles) leur donnera la motivation d'augmenter les demandes autant que possible sans perdre la compatibilité.

2.4. L'Analyse du Modèle Comme un Jeu Non-Coopératif:

Nous avons vu, dans l'étape précédente, que le modèle du marchandage contient deux types de décisions: le choix des stratégies de menace et le choix des demandes.

Dans son analyse, Nash réduit son modèle à un jeu non-coopératif tel que les phases 1 et 3 deviennent des mouvements, ce jeu contient deux sous-jeux: le sous-jeu de menace et le sous-jeu de demande, puis il examine chacun des sous-jeux séparément, ensuite il cherche le point d'équilibre qui soit la solution pour les deux sous-jeux à la fois. En suivant les termes de Selten, le problème devient celui de déterminer "l'équilibre parfait en sous-jeu"[Binmore (1992)].

2.4.1 Le Sous-Jeu de Demande.

Supposons que le point de menace, i.e., le point qui exprime l'utilisation des menaces, est connu par les deux joueurs soit parce que le jeu accepte une menace fixe, soit parce que le problème du choix des stratégies de menace est déjà réglé. Se pose alors la question de savoir comment les joueurs choisissent leurs demandes.

Soient u_{1n}, u_{2n}, les coordonnées du point de menace $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{B}$, ou u_{1n}, u_{2n} sont les utilités des joueurs si la menace est exécutée. Considérons la fonction $g(d_1, d_2)$ qui prend la valeur +1, si les demandes sont compatibles, et la valeur 0, si les demandes sont incompatibles, les gains des joueurs seront alors :

$$P_1 = d_1.g + u_1 n(1- g) \quad \text{pour le joueur 1} \qquad (1)$$

$$P_2 = d_2.g + u_2 n(1- g) \quad \text{pour le joueur 2} \qquad (2)$$

Nash trouve que le sous-jeu de demande défini par ces fonctions de paiement possède un nombre infini des points d'équilibre non équivalents. Une paire (d_1, d_2) de demandes formera *un point d'équilibre* si:

1) Elle est représentée par un point de $\partial\boldsymbol{B}$.

2) Ce point ne se trouve ni au-dessous ni à gauche de $\boldsymbol{n}$.

Une propriété fondamentale de la solution est *l'unicité*, afin de vérifier cette propriété Nash cherche à éliminer les points d'équilibre qui ne sont pas relativement stables.

Pour arriver à un point unique interprété comme la solution, Nash prolonge (smooth) le sous-jeu en approchant la fonction discontinue g par une fonction continue h, la fonction h peut être regardée comme une mesure de la probabilité d'avoir des demandes compatibles.

Supposons que $h(d_1, d_2) = 1$ si $(d_1, d_2) \in \boldsymbol{B}$, et que h décroît progressivement vers zéro quand (d_1, d_2) s'écarte de $\boldsymbol{B}$. Plus le point (d_1, d_2) s'écarte de $\boldsymbol{B}$ plus h décroît, mais sans atteindre zéro. Faisons une transformation des fonctions d'utilité tel que $u_{1n} = 0$ et $u_{2n} = 0$, alors les fonctions de paiement du sous-jeu prolongé deviennent $P_1 = d_1.h$, et $P_2 = d_2.h$. Une paire de demandes (d_1, d_2), qui peut être regardée comme une paire de stratégie pure, formera un équilibre si P_1 est maximum pour une constante d_2 et si P_2 est maximum pour une constante d_1.

Supposons qu'il existe un point (d_1, d_2) tel que $d_1.d_2.h^2$ est le maximum pour $d_1 \geq 0$ et $d_2 \geq 0$, alors $d_1.h$ et $d_2.h$ sont les maximums pour les constantes d_2 et d_1 respectivement, et le point (d_1, d_2) doit être le point d'équilibre.

Soit $\boldsymbol{p}$ un point tel que $d_1.d_2.h^2$, ou encore tel que $u_1.u_2.h^2$, est le maximum. Soit ρ le maximum de $u_1.u_2$ avec $u_1 \geq 0$ et $u_2 \geq 0$. Remarquons que la valeur de $u_1.u_2$ en $\boldsymbol{p}$ est au moins ρ puisque $1 \geq h \geq 0$, et que plus (d_1, d_2) s'éloigne de $\boldsymbol{B}$ plus $\boldsymbol{p}$ décroît, par

conséquent le point maximum de $u_1.u_2.h^2$ doit être le plus proche possible de ***B*** [Figure 1].

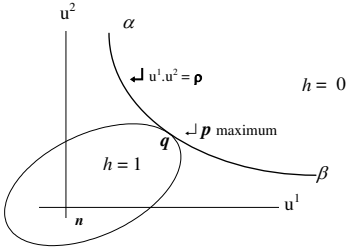


Figure 1. Le jeu de marchandage prolongé

Dans le figure, on voit que ***q*** est le maximum de $u_1.u_2$ en ***B***, et que $\alpha\beta$ est l'hyperbole $u_1.u_2 = \rho$ qui touche ***B*** en ***q***, remarquons que ***p*** doit se trouver au-dessus de $\alpha\beta$ mais proche de ***B*** pour $h \approx 1$. Nash conclue que le point d'équilibre qui sera interprété comme la solution n'est que le point ***q***, le seul point où ***B*** touche l'hyperbole $\alpha\beta$ dont les asymptotes sont les lignes horizontales et verticales passant par ***n.*** Le point ***q*** est caractérisé comme: "*the only necessary limit of the equilibriume points of smoothed game*" (Nash,1953 pp. 133).

En résumé, en considérant que le point de menace ***n*** est connu par les joueurs, Nash propose le *critère* suivant pour choisir le point d'équilibre: [Figure 2]

Soit T la droite tangente à l'hyperbole $\alpha\beta$ en ***q****, telle que* ***n, q*** $\in$ ***B*** *et telle que la pente de* ***nq*** *est positive. Si T est une* ***droite de support*** *pour* ***B****, i.e., tous les points de* ***B*** *sont soit au-dessous et à gauche de T soit sur T elle-même, et si la pente de T est égale à* ***la négative*** *de la pente de* ***nq****, alors* ***q*** *est le point de solution pour le point de menace* ***n****. Si* ***nq*** *est* ***horizontale (ou verticale)****; si elle est elle-même la droite de support pour* ***B*** *et si* ***q*** *est le point maximum* ***à droite (ou en haut)*** *des points communs entre* ***B*** *et* ***nq****, le point* ***q*** *sera encore la solution pour le point* ***n****. Ce critère est nécessaire et suffisant* [Figure 2].

Ce critère nous fournit un point de solution ***q*** unique, cependant les stratégies qui la réalisent ne sont pas forcement uniques [Mayberry (1992.b)].

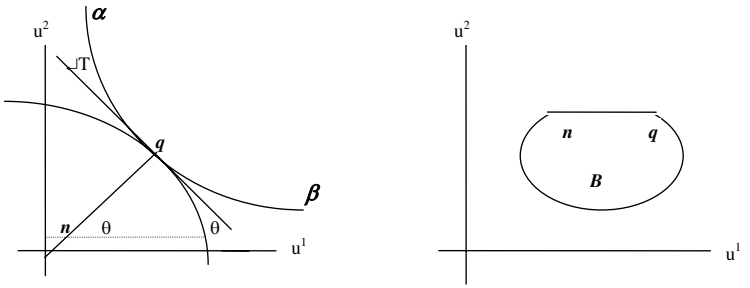


Figure 2. La solution de Nash

2.4.2 Le Sous-Jeu de Menace.

Après avoir trouvé le point de solution ***q***, i.e., les demandes optimales, pour un point donné de menace, on peut se demander s'il est possible de déterminer le point de menace ***n***, qui soit optimal, étant donné que le point de solution souhaitable est connu par les joueurs.

Considérons l'ensemble ∂***B*** dont la pente est négative, rappelons que ∂***B*** est l'ensemble de toutes les solutions possibles, i.e., les points de l'ensemble ***B*** qui ne sont pas dominés. Considérons un point ***q*** $\in \partial$***B*** tel que T est la tangente de ∂***B*** au point ***q***, le critère de Nash nous permet de dire que le point ***n*** doit se trouver sur la ligne *m* dont la pente est égale à l'opposé de la pente de T. Alors, tout point sur la droite *m* est candidat pour être le point de menace [Figure 3]. Evidemment il va de soi que le point ***n*** est un

point de ***B***, en fait ce point doit être dans la partie réalisable par des stratégies non corrélées [cf. Figure 5]

En traçant les droites m pour chaque point de $\partial \boldsymbol{B}$, on trouve que ***B*** est divisé en plusieurs sous-ensembles, chacun contient un point de $\partial \boldsymbol{B}$. Si la pente de $\partial \boldsymbol{B}$ se change d'une manière *continue* les sous-ensembles deviennent des *droites*, si $\partial \boldsymbol{B}$ contient un *coin* le sous-ensemble correspondant devient un *angle*, et si $\partial \boldsymbol{B}$ est *linéaire* les droites deviennent *parallèles* [Figure 3].

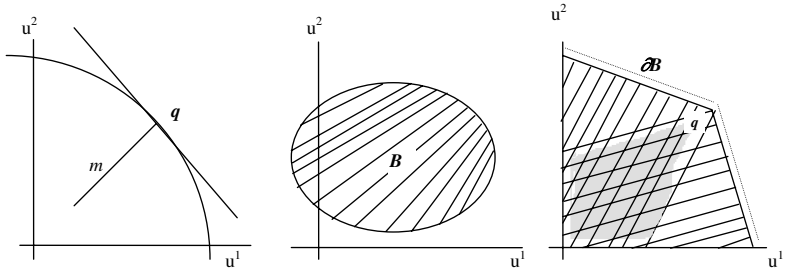


Figure 3. Les différentes formes des droites de "menace".

Remarquons que le joueur 1 préfère les points à droite de $\partial \boldsymbol{B}$, et que le joueur 2 préfère les points à gauche de $\partial \boldsymbol{B}$. Comme $\partial \boldsymbol{B}$ possède une pente négative, les intérêts des joueurs sont opposés, la question est alors de savoir comment les joueurs doivent choisir leurs stratégies de menace.

Le joueur 1 exige que le point de menace soit, autant que possible, dans la partie inférieure-droite de ***B***, le joueur 2, à son tour, exige que ce point soit, autant que possible, dans la partie supérieure-gauche de ***B***. Toute stratégie de chaque joueur restreindra l'ensemble ***B*** à un sous-ensemble convexe; cette remarque nous permet de faire appel au théorème de *Minimax* de Von Neumann qui peut être appliqué à notre

cas avec quelques modifications [Mayberry (1992.b)]. En fait, l'existence des paires d'équilibre ($\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$) de stratégies de menace, qui déterminent un point de menace ***n*** et un point de solution ***q***, est donnée par un théorème, la paire ($\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$) est une *paire d'équilibre* dans le sens où $\boldsymbol{t}_1$ va garantir au joueur 1 un gain u_1 au moins aussi bon que q_1, et $\boldsymbol{t}_2$ va garantir au joueur 2 un gain u_2 au moins aussi bon que q_2.

Théorème 1.[3]

Tout jeu bimatriciel possède au moins une paire d'équilibre ($\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$) de stratégies de menace.

Théorème 2.[4]

Si ($\boldsymbol{t}'_1$, $\boldsymbol{t}'_2$) et ($\boldsymbol{t}''_1$, $\boldsymbol{t}''_2$) sont des paires d'équilibre de stratégies de menace, alors ($\boldsymbol{t}'_1$, $\boldsymbol{t}''_2$) et ($\boldsymbol{t}''_1$, $\boldsymbol{t}'_2$) sont aussi des paires d'équilibre. De plus, la solution de Nash sera la même pour les deux paires ($\boldsymbol{t}'_1$, $\boldsymbol{t}'_2$) et ($\boldsymbol{t}''_1$, $\boldsymbol{t}''_2$).

Le théorème 2 nous permet de tenir des propos sur les *stratégies optimales* de menace plutôt que sur les points d'équilibres.

2.4.3 Les Stratégies Optimales de Menace et Les Demandes Optimales.

Rappelons que le point de menace exprime le fait que chacun des joueurs agit tout seul, les espérances mathématiques des valeurs de menace sont:

$$\mathrm{E}[n_1] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i\, a_{ij}\, y_j \qquad \text{pour le joueur 1} \qquad (3)$$

[3] Cf. Owen (1995).
[4] Cf. Owen (1995).

$$E[n_2] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i\, b_{ij}\, y_j \qquad \text{pour le joueur 2} \qquad (4)$$

avec X l'ensemble des stratégies de menace mixtes $\boldsymbol{x}_i$ possibles pour le joueur 1, et Y est l'ensembles des stratégies de menace mixtes $\boldsymbol{y}_j$ possibles pour le joueur 2, $A_{(n,\ m)} = (a_{ij})$ et $B_{(n,\ m)} = (b_{ij})$ sont les matrices de gains pour les joueurs 1 et 2 respectivement.

Avec la notation matricielle, (3) et (4) deviennent

$$n_1 = x^{\mathrm{T}}Ay \qquad (5)$$

$$n_2 = x^{\mathrm{T}}By \qquad (6)$$

Après avoir déterminé le point de menace, Nash cherche le point de solution qui maximise

$$f(u^*, v^*) = (u - x^{\mathrm{T}}Ay)(v - x^{\mathrm{T}}By) \qquad (7)$$

sous contraintes que $u \geq x^{\mathrm{T}}Ay$, et $v \geq x^{\mathrm{T}}By$.

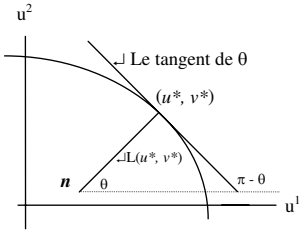
De (7) le problème devient la détermination de u et v tel que:

$$u^* = \max_{\vec{x}}\{\min_{\vec{y}}\ u^*(x, y)\} \qquad (8)$$

$$v^* = \max_{\vec{y}}\ \{\ \min_{\vec{x}}\ v^*(x, y)\} \qquad (9)$$

Rappelons que les intérêts des joueurs sont opposés, donc u^* et v^* ne peuvent pas tous les deux croître en même temps. Plusieurs questions peuvent se poser concernant (8) et (9). Est-ce que $\vec{x}$ qui maximise u^* en (8) est le même qui minimise v^* en (9)? Si oui, alors le point (u^*, v^*) est un point d'équilibre fort. Le point (u^*, v^*) est un point de $\boldsymbol{B}$, mais est-ce que (u^*, v^*) est pareto optimal, i.e., (u^*, v^*) $\in \partial\boldsymbol{B}$? Si oui, comment peut-on trouver $\vec{x}$, $\vec{y}$, u^*, et u^* ? [Figure 4]

Dans cette figure, on remarque que le joueur 1, pour s'assurer de gagner $\geq u^*$, doit pouvoir garantir que le point de menace est au-dessous et à droit de la droite L(u^*, v^*) [Owen (1997)].



la pente de L(u^*, v^*) = tanθ

$$\tan\theta = -\frac{dv}{du}.(u^*, v^*) = -\gamma'(u^*)$$

L(u^*, v^*) a l'équation $n_2 - v^* = -(n_1 - u^*).\gamma'(u^*)$

donc, le joueur 1 veut garantir que

$n_2 - v^* \leq -(n_1 - u^*).\gamma'(u^*)$. où $n_2 = x\mathrm{B}y$, $n_1 = x\mathrm{A}y$

$x\mathrm{B}y - v^* \leq -(x\mathrm{A}y - u^*).\gamma'(u^*)$

Remarquons que . $v^* = \gamma(u^*)$, et $\gamma'(u^*) < 0$.

donc, une condition nécessaire pour que le joueur 1 puisse garantir $\geq u^*$ est:

$$x(-\gamma'(u^*)\mathrm{A} - \mathrm{B})y \geq -\gamma'(u^*).u^* - v^*) \qquad (10)$$

de même, une condition pour que le joueur 2 puisse garantir un gain $\geq v^*$ est

$$x(-\gamma'(u^*)\mathrm{A} - \mathrm{B})y \leq -\gamma'(u^*).u^* - v^*) \qquad (11)$$

Si les joueurs vérifient leurs conditions (10) et (11), le point (u^*, v^*) sera pareto optimal, i.e., $(u^*, v^*) \in \partial \boldsymbol{B}$.

L'analyse qu'on a faite jusqu'à maintenant n'est valable que dans le cas où on peut trouver une droite tangente à $\boldsymbol{B}$ à un seul point, mais il n'y a pas de garantie d'avoir une tangente à $\boldsymbol{B}$, (cf. Fig. 3 où il existe un angle)

Donc, nous voulons chercher le point (u^*, v^*), qui soit évidement pareto optimal, tel que :

$$val\ (-\gamma'(u^*)\mathrm{A} - \mathrm{B}) \leq -\gamma'(u^*).u^* - v^* \qquad (12)$$

$$val\ (\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \frac{ad - bc}{(a-b)+(d-c)} \qquad (13)$$

$$\vec{x} = \frac{d-c}{(a-b)+(d-c)} \qquad (14)$$

$$\vec{y} = \frac{d-b}{(a-b)+(d-c)} \qquad (15)$$

2.4.4 Exemple.[Owen (1997)]

Soit (A, B) un jeu bimatriciel donné par

$$\mathrm{A}_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B}_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 4 & 57 \\ 60 & 30 \end{bmatrix}$$

Dans ce jeu, chaque joueur 1 possède deux stratégies de menace. Si les joueurs utilisent leurs stratégies pures, il y aura quatre points de menace: (3, 4), (5, 57), (6,60), et (4, 30), si les joueurs utilisent des stratégies mixtes le point de menace peut se trouver dans l'ensemble $\boldsymbol{\omega} \subset \boldsymbol{B}$ qui représente les gains correspondant à l'utilisation des

stratégies non corrélées [Figure 5]. Soit $\boldsymbol{B}$ l'ensemble, convexe et borné, des alternatives réalisables tel que $\boldsymbol{B}$ soit donné par l'équation $v \leq 100 - u^2$.

Un point de $\boldsymbol{B}$ est un point pareto optimal s'il vérifie : $v = \gamma(u) = 100 - u^2$ avec $0 \leq u \leq 10$.

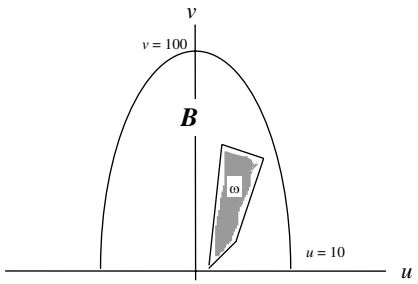


Figure 5.

Donc, pour trouver les stratégies optimales de menace, et les demandes optimales, on doit chercher les x, y, u^*, v^*. Alors, le problème revient à résoudre

$val\ (-\gamma'(u^*)\mathrm{A} - \mathrm{B}) \leq -\gamma'(u^*).u^* - v^*$,

$\gamma'(u^*) = -2u^*$

$val\ (2u^*.\mathrm{A} - \mathrm{B}) = 2u^{*2} - (100 - u^{*2})$ donc, il faut résoudre

$g(u) = val\ (2u^*.\mathrm{A} - \mathrm{B}) - 3u^{*2} + 100$,

nous voulons que $g(u) = 0$,

essayons avec $u = 4$,

$g(4) = val\ (8\mathrm{A} - \mathrm{B}) - 48 + 100$

la matrice $8\mathrm{A} - \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 20 & -17 \\ -12 & 2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $val\ (8\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \frac{-164}{51} = 3{,}2$

on voit facilement que $g(4) = -3{,}2 - 48 + 100 = 48{,}8 \neq 0$

donc on donne u^* autre valeur, finalement on trouve que la valeur de u^* qui vérifie (11) est $u^* = 6{,}3 \Rightarrow v^* = 18, 29$. Pour les valeurs de x^* et y^* on utilise (13) et (14) alors, les stratégies mixtes des joueurs sont $\bar{x} = (0.15,\ 0.85)$ et $\bar{y} = (0.44,\ 0.54)$.

2.5 Le Théorème Axiomatique:

Nash affirme que la solution du jeu devrait satisfaire certains axiomes intuitivement plausibles, puis il montre que cette solution satisfait les deux propriétés fondamentales de l'existence et de l'unicité. Cette solution est donnée par un point $(v_1^*, v_2^*) \in \boldsymbol{B}$ qui maximise le produit

$$f(v_1^*, v_2^*) = (v_1 - a).(v_2 - b)$$

sous les contraintes $v_1 \geq a$, et $v_2 \geq b$.

Nash démontre que la solution obtenue via l'approche axiomatique est la même obtenue par le modèle du marchandage, il considère que les deux approches sont complémentaires. Dans l'approche axiomatique, il n'est pas nécessaire de recourir aux notions de menace et de demande, alors la solution pourrait être applicable ici pour des problèmes dont les hypothèses proposées dans le modèle du marchandage ne sont pas forcément vérifiées. Les notations utilisées sont les mêmes à l'exception de la définition du jeu et des valeurs des joueurs, un jeu ici est une triade $(X, Y, \boldsymbol{B})$ et les valeurs des joueurs deviennent $v_1(X, Y, \boldsymbol{B})$, et $v_2(X, Y, \boldsymbol{B})$.

2.5.1 Les Axiomes.

Les axiomes proposés sont considérés comme des propriétés d'une solution "raisonnable" ; de plus, ces axiomes jouent un rôle très important qui consiste à nous aider à éliminer tous les points candidats qui pourraient être solution sauf une.

Axiome 1. Faisabilité. Dans chaque jeu $(X, Y, \boldsymbol{B})$, il existe une solution unique (v_1, v_2) telle que $(v_1, v_2) \in \boldsymbol{B}$.

Axiome 2. Pareto Optimalité. Si $(u_1, u_2) \in \boldsymbol{B}$, tel que $u_1 \geq v_1$, et $u_2 \geq v_2$, donc $(u_1, u_2) = (v_1, v_2)$, i.e., la solution n'est pas dominée par un autre point de $\boldsymbol{B}$, sauf elle-même.

Axiome 3. L'invariance des niveaux d'utilités. Une transformation linéaire des niveaux d'utilités tel que $u_1' = a_1.\ u_1 + b_1$, et que $u_2' = a_2.\ u_2 + b_2$, avec $a_1, a_2 > 0$, ne devrait pas changer la solution, i.e., les valeurs numériques d'une solution peuvent être changées, mais la position relative de (v_1, v_2) dans $\boldsymbol{B}$ devrait rester la même.

Axiome 4. La Symétrie. L'ensemble $\boldsymbol{B}$ est symétrique si : $\forall(u_1, u_2) \in \boldsymbol{B} \Rightarrow (u_2, u_1) \in \boldsymbol{B}$; $(\boldsymbol{B}, (a, b))$ est symétrique si $\boldsymbol{B}$ est symétrique et $a = b$; Si $(\boldsymbol{B}, (a, b))$ est symétrique $\Rightarrow v_1 = v_2$.

Axiome 5. L'Anonymat. La solution ne doit pas dépendre du nom des joueurs. Formellement, soit π: {1, 2, ..., n} $\rightarrow$ {1, 2, ..., n} une bijection, soit $x \in \mathbf{R}^n$, soit $\bar{\pi}(x) \equiv (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, ..., x_{\pi(n)})$ et $\bar{\pi}(\boldsymbol{B}) \equiv \{x' \in \mathbf{R}^n \mid \exists\ x \in \boldsymbol{B}$ avec $x' = \bar{\pi}(x)\}$.Alors, $f(\bar{\pi}(\boldsymbol{B})) = \bar{\pi}(f(\boldsymbol{B}))$.

Axiome 6. L'Indépendance des Alternatives Non Pertinentes (Irrelevant). Si une alternative est choisie comme la solution du jeu $(X, Y, \boldsymbol{B})$, et si cette alternative appartient à $\boldsymbol{B}`$ tel que $\boldsymbol{B}` \subseteq \boldsymbol{B}$, donc cette alternative est la solution pour le jeu $(X, Y, \boldsymbol{B}`)$. Formellement, si $\boldsymbol{B}` \subseteq \boldsymbol{B}$ et $f(\boldsymbol{B}) \in \boldsymbol{B}`$, donc $f(\boldsymbol{B}`) = f(\boldsymbol{B})$.

Théorème 3 [Nash (1950)]. *La solution de Nash est la seule solution satisfaisant les axiomes 2, 3, 4, et 6.*

2.5.2 Commentaire.

Il n'existe pas d'axiomes universels que l'on peut appliquer à tous les cas ; les axiomes de Nash, soumis aussi à ce jugement, prêtent le flanc à la critique.

Les conflits dans la vie réelle se terminent rarement avec un compromis. Donc *l'optimalité de pareto* n'est pas toujours demandée et les conflits se terminent par un compromis dominé. Par exemple, dans les conflits entre deux pays possédants des pouvoirs asymétriques, il est prudent de prévoir le résultat. La guerre peut être évitée si les dirigeants comparent le nombre de soldats et les forces militaires et si le parti le plus faible se rend ; du point du vue de la théorie des jeux une telle action est considérée comme un succès et comme une solution efficace, mais du point de vue militaire cette action est honteuse [Mayberry (1992.a)].

L'axiome de la *symétrie* est aussi critiquée, les capacités des joueurs de comprendre les aspects de l'environnement ne sont pas prises en compte, il y a des différences entre eux s'ils entrent d'une manière symétrique dans le problème.

L'axiome de l'*invariance des niveaux d'utilités* est suffisant si on suppose que les niveaux d'utilités sont aussi bons que les autres, la comparaison interpersonnelle des utilités est assez difficile, on ne sait pas à quel niveau on doit mesurer les utilités.

L'axiome de l'*Indépendance des Alternatives Non pertinentes* nous informe que si (v_1,v_2) est la solution pour le jeu (X, Y, $\boldsymbol{B'}$), et si on agrandit l'ensemble $\boldsymbol{B'}$ pour devenir $\boldsymbol{B}$ tel que $\boldsymbol{B'} \subseteq \boldsymbol{B}$, alors la solution du nouveau problème doit être soit la

solution (v_1,v_2), soit un nouveau point $(u_1,u_2) \in \boldsymbol{B}$. On peut critiquer cette axiome en donnant le contre-exemple suivant [Figure 6] :

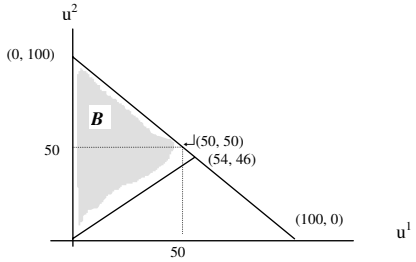


Figure 6. Un contre-exemple pour l'axiome 6.

Cet exemple présente un problème de marchandage symétrique ($\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{d}$) dont les coordonnées de $\boldsymbol{d}$ sont (0, 0), d'après l'axiome 4 le point de solution devrait être (50, 50). Considérons l'ensemble $\boldsymbol{B'}$ tel que $\boldsymbol{B'} \subseteq \boldsymbol{B}$, le point (50, 50) $\in \boldsymbol{B}$ donc l'axiome 6 nous donne ce point comme la solution pour le nouveau problème, le joueur 2 accepte-t il cette solution qui donne un avantage au joueur 1?[5]

2.6 Conclusion:

Nash, dans ses articles de 1950 et de 1953, construit son analyse du problème de marchandage en partant d'une idéalisation du problème. D'abord il limite son analyse à un jeu à deux joueurs, ensuite il suppose que les joueurs possèdent une information complète, puis il donne des hypothèses concernant l'ensemble $\boldsymbol{B}$ et les ensembles des stratégies possibles. Il suppose que l'ensemble de joueurs reste inchangé, que la solution reste la même si on applique une contraction de l'ensemble $\boldsymbol{B}$, et que la solution ne change pas en passant d'un niveau d'utilité à un autre. Pour sortir de cette idéalisation du problème, et pour arriver à une analyse plus générale,

[5] Remarquons que le gain supérieur du joueur 2 est égal à 100, alors que celui du joueur 1 est égal à 54.

l'ensemble des hypothèses et conditions proposées par Nash peut être réexaminé. Harsanyi et Selten proposent une généralisation du problème en supposant que l'information est incomplète. D'autres auteurs modifient l'ensemble des axiomes, par exemple, Kalai et Smorodinsky modifient l'axiome 6 en introduisant l'axiome de la monotonie individuelle, Perles et Mashler établissent l'axiome de la superadditivité. D'autres font des modifications concernant les paramètres du problèmes, par exemple l'ensemble des joueurs peut être changé en permettant à certains joueurs d'entrer ou de sortir. Un autre exemple est d'étudier l'ensemble réalisable et le point de conflit dans l'incertain, en supposant aussi que l'ensemble réalisable et le point de conflit peuvent se déplacer en faveur de certains joueurs. Dans les chapitres qui suivent on verra rapidement ces modifications possibles à appliquer.

CHAPITRE III

LA SOLUTION GENERALISEE DE NASH POUR LES JEUX A DEUX JOUEURS AVEC INFORMATION INCOMPLETE

3.1 Introduction.

L'objectif de ce chapitre est d'aborder la solution proposée par J. Harsanyi et R. Selten pour le problème de marchandage à deux joueurs avec information incomplète. Comme leur solution est une généralisation de la solution de Nash, alors leur travail sera présenté, comme dans le chapitre précédent, en quatre étapes. D'abord on présente la définition du problème de marchandage avec information incomplète. Ensuite on expose le modèle de marchandage pour des problèmes où l'information est incomplète. Puis on montre leur analyse du problème comme un jeu non-coopératif, et enfin on expose le théorème axiomatique.

3.2 La Définition Du Problème de Marchandage à Information Incomplète.

L'information incomplète, de la part d'un joueur, est interprétée comme l'ignorance de la *structure mathématique* du jeu. Le manque d'information sur la structure du jeu peut prendre différentes formes, un manque d'information sur l'ensemble des joueurs, sur la règle du jeu, sur les fonctions de paiement des différents joueurs, ou sur les stratégies disponibles aux joueurs.

3.2.1 Les Types de Joueurs et la Matrice de Probabilités *p*.

Soit Γ un jeu de marchandage, l'incertitude du joueur sur sa structure peut être modélisée en supposant que chaque joueur possède différents types possibles, tout *type* aura sa propre fonction de paiement, sa propre quantité de ressources, et son propre degré d'information. Soit $\{t_1^1, t_1^2, ..., t_1^k, ..., t_1^K\}$ l'ensemble des types possibles pour le

joueur 1 avec k= 1, 2, ..., ..., K , et $\{t_2^1, t_2^2, ..., t_2^m, .., t_2^M\}$ l'ensemble des types possibles pour le joueur 2 avec m = 1, 2, ...,..., M.

Chaque joueur *connaît* son propre type mais *ignore* le type de son adversaire alors, chacun des joueurs choisira une *distribution de probabilité subjective* sur l'ensemble des types possibles de son adversaire.

Une *matrice de probabilité* $p = (p_{km})$ représente les distributions de probabilités de deux joueurs sur les ensembles de types, la matrice *p* est supposée connue par les joueurs, chaque élément p_{km} de cette matrice nous donne les probabilités que chacun des joueurs met sur les types de l'autre joueur, par exemple $p_{23} = 1/6$ signifie qu'il y a une chance sur six que le joueur 1 soit de type t_1^2, et que le joueur 2 soit de type t_2^3. La matrice *P* doit vérifier les conditions suivante :

$$p_{km} \geq 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{M} p_{km} = 1 \qquad (2)$$

Soit q_1^k, q_2^m respectivement les probabilités que le joueur 1 soit de type t_1^k, et que le joueur 2 soit de type t_2^m, donc

$$q_1^k = \sum_{m=1}^{M} p_{km} > 0 \qquad (3)$$

$$q_2^m = \sum_{k=1}^{K} p_{km} > 0 \qquad (4)$$

3.2.2 Les Types Actifs et Les Fonctions Conditionnelles de Paiement.

Supposons que le joueur 1 soit de type t_1^k et que le joueur 2 soit de type t_2^m, alors on dit que les deux joueurs sont représentés par leurs types *actifs* t_1^k et t_2^m, de

même tous les types $t_1^{k'}$ avec $k' \neq k$, $t_2^{m'}$ avec $m' \neq m$ sont les types *inactifs.* Dans les jeux avec information complète les gains des joueurs dépendent seulement des stratégies (pures, ou mixtes) utilisées ; dans les jeux avec information incomplète les gains v_1^k et v_2^m des types t_1^k et t_2^m des joueurs ne dépendent pas seulement des stratégies s_1^k et s_2^m utilisées mais aussi des types actifs t_1^k, t_2^m, donc

$$v_1^k = V_1^k(s_1^k, s_2^m ; k, m) \qquad (5)$$

$$v_2^m = V_2^m(s_1^k, s_2^m ; k, m) \qquad (6)$$

Ici, V_1^k et V_2^m représentent les fonctions de paiement de t_1^k et t_2^m, cependant on appellera V_1^k, V_2^m les *fonctions conditionnelles de paiement* car le gain du joueur t_1^k sera la quantité v_1^k définie par (5) *seulement* si t_1^k est un type actif *et* si le type actif du joueur 2 est t_2^m, de même le gain du joueur t_2^m sera la quantité v_2^m définie par (6) *seulement* si t_2^m est une type actif *et* si l'autre type actif est t_1^k. Si t_1^k ou t_2^m est un type inactif alors il recevra le gain zéro.

Par conséquent, pour tout accord réalisé par les deux joueurs il y aura une bimatrice $v_{(km)} = (v_{ikm})$ où $i = 1, 2$; $k = 1, 2, ..., K$; $m = 1, 2, ..., M$. Chaque élément v_{ikm} désigne le gain que le joueur i reçoit de cet accord si le joueur 1 est de type k, et le joueur 2 est de type m.

3.2.3 L'Ensemble des Accords.

L 'analyse de Harsanyi et Selten suppose que les accords irréalisables sont exclus, et que l'ensemble des accords réalisables est donné. Soit $V = \{v\}$ l'ensemble des accords réalisables, chaque élément de V est défini par une bimatrice $v_{(km)} = (v_{ikm})$

correspondant à un accord, V est supposé fini, l'ensemble V comprend un élément spécial qui représente le *point de conflit*, ce point est défini par une bimatrice $c = (c_{ikm})$, chaque élément de la bimatrice c représente les gains reçus par les deux joueurs en cas de non accord.

Définition 1: le problème de marchandage à information incomplète.

Un *problème de marchandage avec information incomplète* est défini par un triplet (V, c, p) où V est l'ensemble des accords réalisables, c est le point de conflit, et p est la matrice de probabilité.

3.3 Le Modèle de Marchandage.

Le modèle de marchandage sert à modéliser le processus de marchandage comme un *jeu* Γ en précisant les règles sur lesquelles régissent les mouvements, les engagements, et les accords. Le modèle comprend plusieurs *tours* consécutifs et se caractérise comme *un modèle "d'acceptation" (acceptence)*, i.e., chaque joueur fait des concessions, en proposant de nouveaux accords, qui soient acceptables pour lui, à chaque fois que le jeu risque d'aboutir à une impasse.

3.3.1 Le Modèle.

A chaque tour (période) j ($j = 1, 2, ...$) du jeu, les joueurs choisissent *simultanément* leurs offres et s'engagent à les réaliser. Si les offres sont compatibles, i.e., $v_1 \in V$, $v_2 \in V$ et $v_1 = v_2$ alors ils reçoivent les gains correspondants, sinon ils doivent choisir d'autres offres à nouveau.

Les joueurs ont le choix de choisir de nouvelles offres ou simplement de rechoisir leurs anciennes. Si à un tour *j* du jeu chacun choisit une de ses anciennes offres, alors la négociation échoue et, par conséquent, tous les deux reçoivent les gains correspondant au point de conflit.

Donc, pour éviter d'arriver au point de conflit, au moins un joueur doit faire une concession en choisissant une nouvelle offre. Si, à la période *j,* un joueur accepte une offre proposée déjà par l'autre joueur, alors les deux joueurs reçoivent les gains correspondants à cette offre. Si, à une certaine période, chacun accepte l'ancienne offre de l'autre joueur alors une *mécanisme aléatoire* interviendra pour choisir le joueur dont l'offre sera retenue.

3.4 L'Analyse du Modèle Comme un Jeu Non-Coopératif.

Le modèle de marchandage peut être réduit à une *séquence d'offres b* tel que v^{ij} est l'offre de joueur *i* à la période *j*.

$$b = \begin{pmatrix} v^{11}, v^{12}, \ldots, v^{1j} \\ v^{21}, v^{22}, \ldots, v^{2j} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Définition 2 : la séquence d'offres.

Une séquence *b* est appelée *une séquence d'offres* si elle est compatible avec les règles du modèle de marchandage, autrement dit, si à chaque période au moins une des offres v^{ij} est nouvelle, et si les offres des périodes 1, 2, 3, ..., *j*-1 ne sont pas acceptables.

La séquence d'offres *b* est dite *séquence de conflit* si les offres v^{1j} et v^{2j} sont des anciennes offres. Si l'une des offres v^{ij} est acceptable, ou si $v^{1j} = v^{2j}$, alors *b* est appelée

séquence d'un accord. Une séquence d'offres est dite *complète* si elle est soit une séquence de conflit soit une séquence d'un accord. Si les deux accords v^{1j} et v^{2j} sont acceptables avec $v^{1j} \neq v^{2j}$ alors *b* est dite *séquence sémicomplète*. Une séquence *b* est dite *incomplète* si elle n'est ni complète ni sémicomplète.

Définition 3 : la stratégie pure pour un problème à information incomplète.

Une *stratégie pure* s_1^k (ou s_2^m) d'un type t_1^k (ou t_2^m) est une fonction qui assigne un certain accord $s(b) \in V$ pour toute séquence incomplète *b* d'offres, ou qui assigne l'une des deux offres $s(b) = v^{1j}$ ou $s_i(b) = v^{2j}$ pour toute séquence *b* d'offres sémicomplète.

Proposition

Si le nombre des accords réalisables $v \in V$ est fini, alors le nombre de tours est fini, et par conséquent, le nombre de stratégies pures est aussi fini.

3.4.1 Les Gains Espérés.

Supposons que t_1^k et t_2^m sont les deux types actifs des joueurs 1 et 2. Soit S l'ensemble des stratégie pures possibles, S est supposé le même pour les deux joueurs. Soit (s_1^k, s_2^m) le paire des stratégies pures de t_1^k et t_2^m ; $h_{(km)} = h(s_1^k, s_2^m)$ est une bimatrice dont l'élément $h_{ikm} = h_{ikm}(s_1^k, s_2^m)$ spécifie *le gain espéré* du joueur i quand les joueurs 1 et 2 sont représentés par les types t_1^k et t_2^m , cette bimatrice est définie par

$$h(s_1^k, s_2^m) = \begin{cases} v(s_1^k, s_2^m) & si\ b(s_1^k, s_2^m)\ est\ une\ sequénce\ d'un\ accord \\ c & si\ b(s_1^k, s_2^m)\ est\ une\ séquence\ de\ conflit \\ \frac{1}{2} s_1^k(b(s_1^k, s_2^m) + \frac{1}{2} s_2^m(b(s_1^k, s_2^m))\ si\ b\ \ est\ une\ séquence\ sémicomplète \end{cases} \qquad (8)$$

Une *stratégie mixte* y_1^k (ou y_2^m) d'un type t_1^k (ou t_2^m) est une distribution de probabilités sur l'ensemble S des stratégies pures. Soit *Y* l'ensemble des stratégies mixtes possibles, *Y* est supposé le même pour les deux joueurs. Désormais on se limitera aux stratégies mixtes sans perdre aucune généralisation puisque les stratégies pures sont des cas spéciaux des stratégies mixtes.

Soit $h_{(km)} = h(y_1^k, y_2^m)$, une bimatrice, tout élément $h_{ikm} = h_{ikm}(y_1^k, y_2^m)$ spécifie le *gain espéré* que les joueurs de *types actifs* t_1^k et t_2^m reçoivent quand ils utilisent les stratégies mixtes y_1^k, y_2^m.

3.4.2 Les Fonctions Semiconditionnelles de Paiement des Types Actifs.

Soient t_1^k et t_2^m les deux types actifs, leurs gains v_1^k et v_2^m seront définis par (5) et (6). Remarquons que le joueur 1 de type t_1^k ne connaît pas le type de son adversaire, par contre, il sait que son adversaire peut être un des M types du joueur 2, donc t_1^k ne choisira pas sa stratégie seulement contre un certain type t_2^m mais contre *tous* les types t_2^m avec m = 1, 2, ..., M de joueur 2.

Cette remarque nous aide à apercevoir que le type t_1^k ne cherche pas à maximiser le gais v_1^k, mais cherche à maximiser *l'espérance mathématique* u_1^k du gain v_1^k défini par :

$$u_1^k = U_1^k(y_1^k, y_2^*) \qquad (9)$$

avec $$y_2^* = (y_2^1, y_2^2, \ldots, y_2^m, \ldots, y_2^M) \qquad (10)$$

$$u_1^k = \frac{1}{q_1^k} \sum_{m=1}^{M} p_{km} h_{1km}(y_1^k, y_2^m) \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, K \qquad (11)$$

Dans (9) on introduit le symbole y_2^* pour indiquer que l'espérance mathématique u_1^k du type actif t_1^k ne dépend pas seulement de la stratégie y_2^m d'un type t_2^m, mais plutôt des stratégies $y_2^1, y_2^2, \ldots, y_2^m, \ldots, y_2^M$ des types $m = 1, 2, \ldots, M$ possibles pour son adversaire.

De même, la quantité que le joueur 2 cherche à maximiser est l'espérance mathématique u_2^m de gain v_2^m défini par :

$$u_2^m = U_2^m(y_1^*, y_2^m) \qquad (12)$$

avec $$y_1^* = (y_1^1, y_1^2, \ldots, y_1^k, \ldots, y_1^K) \qquad (13)$$

$$u_2^m = \frac{1}{q_2^m} \sum_{k=1}^{K} p_{km} h_{2km}(y_1^k, y_2^m) \qquad \text{pour } m = 1, 2, \ldots, M \qquad (14)$$

Les fonctions conditionnelles de gain V_1^k et V_2^m définies par (5) et (6) sont différentes des *fonctions semi-conditionnelles* U_1^k et U_2^m définies dans (9) et (12), rappelons que V_1^k et V_2^m définissent v_1^k et v_2^m telles que

(a) le type t_1^k est un type actif, et

(b) l'autre type actif doit être un type particulier t_2^m de l'autre joueur.

Au contraire, U_1^k et U_2^m définissent u_1^k et u_2^m indépendamment de (b), mais (a) est toujours valable.

3.4.3 Convertir le Jeu Γ à un Jeu Γ* Avec Information Complète.

En introduisant la matrice de probabilité $p_{(km)}$, le jeu **Γ** peut être converti en un jeu **Γ*** à information complète mais *imparfaite* où la structure mathématique, définie par cette matrice, sera connue par les deux joueurs [Harsanyi (1995)], en outre, le jeu **Γ*** peut être considéré comme un jeu à (N = K+M) joueurs dont les joueurs sont les

types k de joueur 1 et m de joueur 2, et dont les fonctions de paiement sont les fonctions semiconditionnelles U_1^k et U_2^m. Si on regarde les types k et m comme les *joueurs réels* et si on regarde les fonctions U_1^k et U_2^m comme les fonctions de paiement, alors on peut définir différents points d'équilibre et opérer une sélection parmi ces points.

3.4.4 Les Points d'Equilibre.

Supposons que les joueurs agissent d'une manière non-coopérative, considérons $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2,..., y_n)$ le profil de stratégies mixtes d'un jeu de marchandage à n joueurs, et $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) = (u_1(\boldsymbol{y}), u_2(\boldsymbol{y}), u_3(\boldsymbol{y}), ..., u_n(\boldsymbol{y}))$ *le vecteur conditionnel de paiement* correspondant au profil $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2,...,y_n)$ dont l'élément $u_i(\boldsymbol{y})$ défini par (11) et (12) est l'espérance mathématique du gain de joueur i. Soit $\tilde{y}_i$ une certaine stratégie de joueur i, et $\boldsymbol{y} / \tilde{y}_i$ le profil qu'on obtient de $\boldsymbol{y}$ si on remplace la stratégie y_i par la stratégie $\tilde{y}_i$. On dit que la stratégie $\tilde{y}_i$ est une *meilleure réponse* (best reply) du jouer i contre le profil $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2,...,y_n)$ si

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y} / \tilde{y}_i) = \max_{y_i \in Y} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y} / y_i) \qquad (15)$$

Définition 4 : le point d'équilibre.

Un point d'équilibre est un profil de stratégies $\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_i^*, ..., y_n^*)$ dont toute composante y_i^* est une meilleure réponse contre $\boldsymbol{y}^*$.

Les points d'équilibre des stratégies mixtes sont souvent soumissent à une propriété indésirable : les gains de certains joueurs peuvent être changés à cause d'une

déviation d'un joueur i de sa stratégie mixte vers une autre stratégie pure. Alors pour que les joueurs puissent former des évaluations définitives de leurs gains, on introduit la notion de point d'équilibre strict.

Définition 5 : le point stricte d'équilibre.

Un point d'équilibre est dit *point strict d'équilibre* si pour tout joueur i et pour toute meilleure réponse $\tilde{y}_i$ de ce joueur i contre $\boldsymbol{y}^*$ on écrit

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}^* / \tilde{y}_i) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}^*) \qquad (16)$$

On peut introduire un concept de point d'équilibre plus fort que celui d'un point stricte d'équilibre ; en fait, le concept d'un *point garanti* d'équilibre non seulement protège le joueur j contre *une seule* déviation potentielle de la part d'un joueur i *mais* aussi contre *toutes* les déviations faites *simultanément* par tous les joueurs $i \in N$ avec $i \neq j$.

Définition 6 : le point garanti d'équilibre.

Soit $\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, y_2^*,..., y_i^*,..., y_n^*)$ un point d'équilibre, et soit le profil $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3,..., \tilde{y}_i,..., \tilde{y}_n)$ un profil de stratégies tel que toute composante $\tilde{y}_i$ de $\tilde{y}$ est une meilleure réponse contre $\boldsymbol{y}^*$, un point d'équilibre est dit *point garanti d'équilibre* si pour tout profil $\tilde{y}$ des meilleures réponses contre $\boldsymbol{y}^*$ on peut écrire

$$u_j(\tilde{y} / y_j^*) = u_j(\boldsymbol{y}^*) \quad \forall j \in N. \qquad (17)$$

Lemme 1: *Tout point stricte d'équilibre* $\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, y_2^*,..., y_i^*,...,y_n^*)$ *d'un jeu de marchandage est aussi un point garanti d'équilibre.*

Soit U = { $\boldsymbol{u}$ } l'ensemble de tous les vecteurs $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}^*)$ correspondants aux points stricts d'équilibre $\boldsymbol{y}^*$ du jeu **Γ***, le nombre des vecteurs $\boldsymbol{u}$ est donné par les lemme 2, 3**.**

Lemme 2: *l'ensemble U des vecteurs* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}^*)$ *correspondants aux points stricts d'équilibre* $\boldsymbol{y}^*$ *n'est pas vide.*

Lemme 3: *l'ensemble U des vecteurs* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}^*)$ *correspondants aux points stricts d'équilibre* $\boldsymbol{y}^*$ *est fini.*

3.4.5 L'Ensemble d'Equilibre.

Soit X l'enveloppe (hull) convexe de l'ensemble U ; X représente l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{u}$ qu'on obtient via une distribution de probabilités sur les points stricts d'équilibre, l'ensemble X est appelé *l'ensemble d'équilibre*.

Considérons le vecteur conditionnel de gain $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)$ qui correspond au point de conflit *c*, ce vecteur est défini par

$$w_k = \frac{1}{q_k} \sum_{m=1}^{M} p_{km}\, c_{1km} \qquad \forall\, k \in \mathrm{K} \qquad (18)$$

$$w_m = \frac{1}{q_m} \sum_{k=1}^{K} p_{km} c_{1km} \qquad \forall\, m \in \mathrm{M} \qquad (19)$$

Le vecteur $\boldsymbol{w}$ est caractérisé comme *l'élément minimal* de l'ensemble X, donc

(a) $\boldsymbol{w} \in$ X, et (19)

(b) $w_i \le x_i \qquad \forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathrm{X}$ et $\forall i \in \mathrm{N}$ (20)

Définition 7 : la base de marchandage.

Une base de marchandage B est une paire (X, *p*) dont X représente l'ensemble d'équilibre et *p* est la matrice de probabilités définie par (1), (2), (3), et (4).

La base B = (X, *p*) est dite *régulière* si

$$w_i < x_i \qquad \forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathrm{X} \text{ et } \forall i \in \mathrm{N} \qquad (21)$$

3.5 La Théorie Axiomatique.

Dans cette section on expose le théorème axiomatique de Harsanyi et Selten, on présente d'abord leur solution qui sélectionne un élément unique de X, élément qui maximise le produit généralisé de Nash, puis on donne les axiomes, et enfin on annonce leur théorème.

Définition 8 : la solution.

Une solution du jeu **Γ*** est une fonction $\tilde{f}$ qui désigne un élément $\tilde{u} = \tilde{f}(\mathrm{B})$ de l'ensemble X pour toute base régulière B = (X, *p*) tel que $\tilde{u} = \tilde{f}(\mathrm{B})$ maximise *le produit généralisé de Nash*

$$\pi = \prod_{i=1}^{N} (u_i - w_i)^{q_i} \qquad (22)$$

3.5.1 Les Axiomes.

en 1967 Harsanyi et Selten [HS (1992)] montrent que leur solution, proposée pour les problèmes de marchandage à deux joueurs et à information incomplète, vérifie les deux propriétés fondamentales d'*unicité*, et d'*existence*, et vérifie certaines axiomes "*raisonnables*" d'une solution. L'unicité de leur solution vient du fait que

l'ensemble d'équilibre X est convexe, et l'existence de solution vient de l'existence d'un vecteur $\boldsymbol{u} \in X$ avec $x_i > w_i \ \forall i \in N$. Soit f une solution qui vérifie ces axiomes, on montrera ultérieurement que cette solution n'est que la solution $\tilde{f}$ définie au-dessus.

Axiome 1 : la profitabilité (profitabilty). La solution $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_n) = f(B)$ définie pour une base régulière B = (X, p), telle que $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ est l'élément minimal de X, satisfait l'inégalité $\tilde{u}_i > w_i \ \forall i \in N$.

Axiome 2 : la symétrie des joueurs . Soit B' = (X', p') dérivée de B = (X, p) par un remplacement entre les joueurs, alors la solution $\tilde{u}' = f(B')$ est dérivée de $\tilde{u} = f(B)$ par un remplacement entre les joueurs.

Axiome 3 : la symétrie des types. Si B' = (X', p') est dérivé de B = (X, p) par un remplacement entre les types t_1^i et t_1^j du joueur 1, alors la solution $\tilde{u}' = f(B')$ est dérivé de $\tilde{u} = f(B)$ par un remplacement entre les types t_1^i et t_1^j du joueur 1.

Axiome 4 : l'efficacité. Si $\tilde{u} = f(B)$ est la solution de la base B = (X, p), alors $\nexists \boldsymbol{u} \in X$ tel que $u_i \geq \tilde{u}_i$ avec $u \neq \tilde{u} \ \forall i \in N$.

Axiome 5 : l'invariance linéaire. Si B' = (T(X), p) est dérivé de B = (X, p) par l'application d'un système T = (T_1, T_2, ..., T_n) de transformations linéaires d'utilités, alors $f(B') = T(f(B))$.

Axiome 6 : les alternatives non pertinentes. Soit B = (X, p) et B' = (X', p) deux bases de marchandage avec $X' \subseteq X$ et $f(B) \in X'$, alors $f(B') = f(B)$.

Axiome 7 : division des types. Si B' = (X', p) est dérivé de B = (X, p) par une division d'un type t_1^j d'un joueur 1 à deux types avec une probabilité λ et 1-λ, alors $\tilde{u}' = f(B')$ est une dérivée de $\tilde{u} = f(B)$ par une division de type t_1^j de joueur 1 à deux types.

Axiome 8 : les matrices de probabilités mixtes. Si les deux bases B = (X, p) et B' = (X, p') ont le même vecteur de solution $f(B) = f(B')$ et si p' possède au moins autant de lignes et de colonnes que p, alors pour tout B" = (X, p") avec $p" = \lambda p + (1-\lambda) p'$, avec $0 \leq \lambda \leq 1$, on a $f(B") = f(B') = f(B)$.

Théorème:*[Harsanyi, Selten (1967)] Il existe une et seulement une solution $\tilde{f}$ vérifiant les axiomes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et 8, et qui maximise le produit généralisé de Nash.*

3.6. Conclusion.

Dans ce chapitre on présentait la solution généralisée de Nash pour les problèmes de marchandage à information incomplète. Harsanyi et Selten achevaient

leur analyse en introduisant un grand nombre des concepts spécifiques. Dans ce chapitre on se limitait à la seule présentation des concepts nécessaires pour la compréhension de l'ensemble de l'analyse. On voyaient que leur analyse n'était qu'une généralisation de l'analyse de Nash, et qu'ils introduisaient des axiomes semblables à ceux de Nash. Donc, les critiques faites contre l'analyse de Nash s'appliquent aussi à leur analyse. On peut également critiquer l'hypothèse d'une connaissance commune de la matrice p.

Dans le prochain chapitre on présente les développement ultérieurs concernant le problème de marchandage, et on expose quelques nouveaux concepts de solution en se limitant à présenter les définitions et les relations de base. Trois solutions font l'objet d'une analyse relativement approfondie : la solution de Kalai et Smorodinski, Perles et Maschler, et la solution Egalitaire.

CHAPITRE IV

D'AUTRES APPROCHES DU MARCHANDAGE

4.1 Introduction.

Jusqu'aux années soixante-dix, la solution de Nash est considérée comme la solution du problème de marchandage. les développements ultérieurs sont essentiellement des modifications, des extensions, ou des justifications alternatives de sa solution. Dans les pages qui suivent nous verrons, rapidement, les fondements conceptuels des différentes approches, mais nous n'essaierons pas de rendre compte de tous les développements théoriques, nous nous limiterons aux fondements et aux définitions.

Dans la modélisations des comportements, certains résultats reposent fortement sur un axiome qui peut sembler raisonnable mais que l'on peut remplacer par un autre axiome qui semble également raisonnable. Toutefois, il se peut que le remplacement de cet axiome raisonnable par un autre axiome raisonnable donne des résultats radicalement différents.

4.2 D'autres concepts de solution.

Les différents concepts de solution seront présentés pour un problème de marchandage ($\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{d}$) d'un catégorie $\sum_0^2$, i.e., pour un problème à deux personnes avec un point de conflit (0, 0). Ici on se contentera à présenter les techniques pour déterminer les points de solution, et on n'exposera les axiomes que pour les solutions de Kalai-Smorodinsky, de Perles-Mashler, et la solution Egalitaire.

4.2.1 La solution dictatoriale D^i et D^{*i}.

Cette solution favorise un joueur contre les autres, il garantit à ce joueur son utilité maximale, alors que les autres ne reçoivent que leurs utilités minimales. La

solution $D^i(\boldsymbol{B})$ est le point maximal $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$ tel que $x_j = 0 \quad \forall\, j \neq i$. De même, D^i_j ($\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{d}$) $= d_j, \quad \forall\, j \neq i$. Si $n = 2$, $D^{*i}(\boldsymbol{B})$ est un point $\boldsymbol{x} \in \partial\boldsymbol{B} \equiv \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \mid \nexists\, \boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{B}$ avec $\boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{x} \,\}$ tel que les coordonnées de i soient maximales. Si $\boldsymbol{B}$ est strictement compréhensif alors $D^i(\boldsymbol{B}) = D^{*i}(\boldsymbol{B})$. [Figure 1]

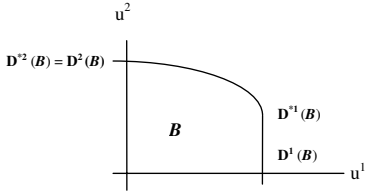


Figure 1. La solution dictatoriale.

4.2.2 La solution "discrète" de Raiffa, R^d.

La solution de Raiffa est une solution représentative d'une famille de solutions basée sur des concessions balancées, c'est-à-dire, que les joueurs font des concessions successives en partant de leurs gains dictatoriaux et en se déplaçant d'un compromis à un autre. Le point de solution $R^d(\boldsymbol{B})$ est le point limite de la séquence $\{z^t\}$ définie par : $x^{i0} = D^i(\boldsymbol{B}) \quad \forall i \in N;\ \forall\, t \in N,\ z^t = \Sigma x^{i(t-1)} / n$, et $x^{it} \in \rho\boldsymbol{B}$ tel que $x^{it}_j = z^t_j \quad \forall\, j \neq i$. Du même, pour Σ^n_d on commence par $D^i(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{d})$ au lieu de $D^i(\boldsymbol{B})$ [Figure 2].

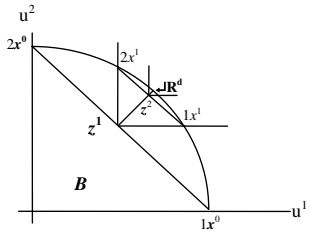


Figure 2. La solution de Raiffa "discrète".

Définition 1: L'optimalité faible de Pareto. Un point solution est appelé *optimum de Pareto faible* si $f(\boldsymbol{B}) \in \rho\boldsymbol{B} \equiv \{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \mid \nexists\, \boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{B}$ avec $\boldsymbol{x}' > \boldsymbol{x} \}$

4.2.3 La solution de Kalai-Smorodinsky.

La démarche est essentiellement la même que celle suggérée par Raiffa qui, sans donner d'axiomes, décrit un processus séquentiel et un processus continu pour choisir le point final de partage. Le point solution K($\boldsymbol{B}$) est le point maximal de $\boldsymbol{B}$ donné par l'intersection de la diagonale joignant l'origine au point $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{B})$. Le point $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{B})$ est le *point idéal* de $\boldsymbol{B}$ défini par $a_i(\boldsymbol{B}) \equiv \max \{x_i \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$ pour tous les *i.* Pour un problème ($\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{d}$) le point K($\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{d}$) est le point maximal de $\boldsymbol{B}$ donné par l'intersection de la diagonale joignant le point $\boldsymbol{d}$ au point $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{d})$ où $a_i(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{d}) \equiv \max \{x_i \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}, \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{d}$ } pour tous les *i.*

La solution de Kalai et Smorodinsky est fondée sur cinq axiomes ; les quatre premiers sont les mêmes que ceux de Nash dans son article de 1950. Le cinquième diffère de celui de Nash et remplace son axiome sur l'indépendance des alternatives non pertinentes.[Figure 3b]

Axiome 6' : la monotonie individuelle.

Soit N = {1, 2}, si $\boldsymbol{B}' \supseteq \boldsymbol{B}$ et $a_j(\boldsymbol{B}') = a_j(\boldsymbol{B})$ pour $j \neq i$, alors $f_i(\boldsymbol{B}') \geqq f_i(\boldsymbol{B})$. C'est-à-dire que l'élargissement de l'ensemble $\boldsymbol{B}$ en faveur d'un certain joueur ne le désavantage jamais [Figure 3a].

Théorème 1 (Kalai-Smorodinsky ;1975).

La solution de Kalai-Smorodinski est la seule solution en Σ_0^2 qui satisfait l'optimalité de Pareto, la symétrie, l'invariance des échelles, et la monotonie individuelle.

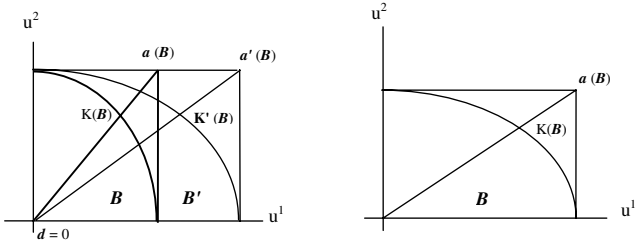


Figure 3. La solution de Kalai-Smorodinsky et la monotonie individuelle.

4.2.4 La solution de Perles-Maschler, (PM).

Perles et Maschler utilisent les quatre mêmes premiers axiomes mais remplacent le cinquième par un axiome de *superadditivité*.

Soit N = {1; 2}, si $\partial\boldsymbol{B}$ est polygonal, PM($\boldsymbol{B}$) est le point limite commun des séquences $\{x^t\}$ et $\{y^t\}$ définies par $x^0 = D^{*1}(\boldsymbol{B})$, $y^0 = D^{*2}(\boldsymbol{B})$; pour tout $t \in \mathbb{N}$, les x^t, $y^t \in \partial\boldsymbol{B}$ sont définis tels que $x_1^t \geq y_1^t$, les segments $[x^{t-1}, x^t]$, $[y^{t-1}, y^t]$ sont contenus dans $\partial\boldsymbol{B}$ et les produits $|(x_1^{t-1} - x_1^t)(x_2^{t-1} - x_2^t)|$ et $|(y_1^{t-1} - y_1^t)(y_2^{t-1} - y_2^t)|$ sont égaux et maximaux. [Figure 4]

On peut alors montrer que, dans ce cas, il y a aussi une solution unique pour laquelle des surfaces égales ont été "balayées" au moment même où l'accord arrive. Un exemple est fourni par la figure 4.

On peut imaginer deux ânes partant de chacune des extrémités $\boldsymbol{x}^0$ et $\boldsymbol{y}^0$ de la courbe de Pareto. Ils marchent le long de cette courbe à deux vitesses variables, mais de telle sorte que la surface déterminée par le produit des vitesses horizontale et verticale de chaque âne soit constant. On peut compléter cette description par l'hypothèse qu'une portion totalement horizontale ou verticale de la surface optimale est traversée en un temps nul. Ainsi le second âne ne démarre vraiment qu'en $\boldsymbol{y}^0$.

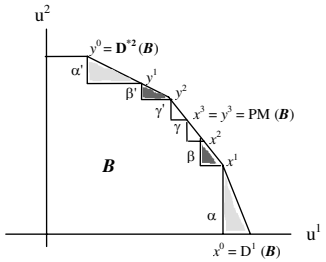


Figure 4. La solution de Perles-Maschler.

On observe que la surface de α est égale à celle de α', que celle de β est égale à celle de β' ; et que celle de γ est égale à celle de γ', par conséquent, la solution est le point $x^3 = y^3 = \mathrm{PM}(\boldsymbol{B})$.

Axiome 6'': La superadditivité.

Soient $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{B'}$ deux jeux de marchandage, alors $f(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B'}) \geqq f(\boldsymbol{B}) + f(\boldsymbol{B'})$.

La justification que donne Maschler de cet axiome est que si un individu a la possibilité de se trouver confronté à deux jeux complètement séparés, la valeur attendue d'un arbitrage dans le jeu composé, avant que la Nature ne soit intervenue, devrait être aussi élevée ou plus forte que la somme des paiements attendus des deux jeux séparés [Shubik (1992)].

Soit $\boldsymbol{\Gamma}_0^2$ une catégorie de problèmes $\boldsymbol{\Sigma}_0^2$, où $\boldsymbol{\Gamma}_0^2$ viole la nécessité d'existence d'un élément $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$ tel que $\boldsymbol{x} > 0$.

Théorème 2 (Perles et Maschler ; 1981).

La solution de Perles et Maschler est la seule solution en $\boldsymbol{\Sigma}_0^2 \cup \boldsymbol{\Gamma}_0^2$ *satisfaisant l'optimalité de Pareto, la symétrie, l'invariance des échelles, et la superadditivité, et qui est continue sur la sous-catégorie* $\boldsymbol{\Sigma}_0^2$ *des problèmes strictement compréhensifs.*

4.2.5 La solution Egalitaire, (E).

L'idée des gains égaux joue un rôle important dans les théories du choix social et du bien-être. Le point de solution E($\boldsymbol{B}$) est un point de $\boldsymbol{B}$ tel que

$$E_i(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{d}) - d_i = E_j(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{d}) - d_j \qquad \forall\, i, j \in N$$

Définition 2: La monotonie forte.

Un point de solution $f(\boldsymbol{B})$ vérifie la condition de *monotonie forte* si $\boldsymbol{B'} \supseteq \boldsymbol{B}$, $\Rightarrow$ $f(\boldsymbol{B'}) \geqq f(\boldsymbol{B})$.

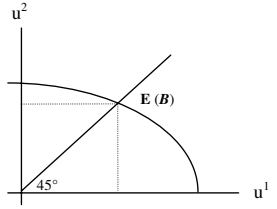


Figure 5. La solution

Théorème 3 (Kalai ; 1977).

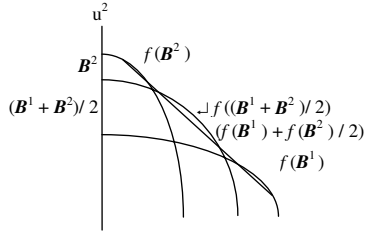
La solution Egalitaire est la seule solution en $\boldsymbol{\Sigma}_0^2$ *qui satisfait l'optimalité faible de Pareto, la symétrie, et la monotonie forte.*

4.3 Autres Approches, les Paramètres du Problèmes de Marchandage.

Rappelons que l'analyse de Nash repose sur une certaine idéalisation du problème. De nouvelles approches ont pour but d'effacer cette idéalisation et de développer l'analyse vers d'autres directions. En fait, plusieurs alternatives de l'approche de Nash méritent d'être présentées, dans la suite on approfondira notre analyse en précisant les différentes modifications que l'on peut appliquer à deux des *paramètres du problème* : l'ensemble réalisable et le point de conflit.

4.3.1 Le rôle de l'ensemble réalisable.

L'ensemble des alternatives réalisables peut être étudié dans le cas *incertain.* Supposons que la négociation se déroule aujourd'hui, mais que l'ensemble des alternatives réalisables ne sera déterminé que demain, alors cet ensemble peut être $\boldsymbol{B}^1$ ou $\boldsymbol{B}^2$ avec des probabilités égales. Soit f la fonction de solution , si les joueurs attendent jusqu'à demain leur problème revient aujourd'hui à chercher le vecteur d'utilités espérées $\boldsymbol{x}^1 \equiv [\, f\,(\mathrm{B}) + f\,(\mathrm{B}')\,] / 2$, mais s'ils choisissent de résoudre l'incertitude aujourd'hui le problème revient à calculer $\boldsymbol{x}^2 \equiv f\,[(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}')\,/2]$ i.e., la solution pour le "problème espéré" $(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}')\,/\,2$. Comme le point $\boldsymbol{x}^1$ n'est pas toujours un optimum de Pareto dans le problème $(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}')\,/2$, alors il sera raisonnable pour les joueurs d'arriver à un compromis aujourd'hui. Une condition nécessaire pour que les joueurs se mettent



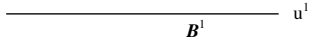


Figure 6. La concavité de l'ensemble réalisable. Le gain du problème espéré $f\,((\boldsymbol{B}^1 + \boldsymbol{B}^2)/\,2)$ domine le gain espéré $(f\,(\boldsymbol{B}^1) + f\,(\boldsymbol{B}^2)\,/\,2)$.

d'accord aujourd'hui est de trouver un compromis qui les avantage simultanément. Cela nous amène à introduire la condition suivante [Figure 6] :

Définition 3 : La concavité. $\forall\, \lambda \in [0, 1],\ f\,(\lambda\boldsymbol{B} + (1\text{-}\lambda)\boldsymbol{B}') \geqq \lambda\, f\,(\boldsymbol{B}) + (1\text{-}\lambda)\, f\,(\boldsymbol{B}')$

Théorème 4 (Myerson ; 1981).

Soit $\boldsymbol{\Sigma}^2_0$, une catégorie de problèmes complètement compréhensifs, les solutions Egalitaire et Utilitariste sont les seules solutions en $\boldsymbol{\Sigma}^2_0$, qui satisfont l'optimalité de Pareto, la symétrie, l'indépendance des alternatives non pertinentes, et la concavité.

Définition 4 :La séparabilité.

Considérons $\boldsymbol{x}\ ,\ \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^2$ et $\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{B}' \in \boldsymbol{\Sigma}^2_0$,soit $\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y} \equiv (x_1 y_1\ ,\ x_2 y_2)$; et $\boldsymbol{B}*\boldsymbol{B}' \equiv \{z \in \mathbf{R}^2 \mid z = \boldsymbol{x}*\boldsymbol{y}\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$, et $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}'\}$, donc, si $\boldsymbol{B}*\boldsymbol{B}' \in \boldsymbol{\Sigma}^2_0$ alors $f\,(\boldsymbol{B}*\boldsymbol{B}') = f\,(\boldsymbol{B}) + f\,(\boldsymbol{B}')$.

Théorème 5 (Binmore ; 1984).

La solution de Nash est la seule solution en $\boldsymbol{\Sigma}^2_0$ qui vérifie l'optimalité de Pareto , la symétrie, et la séparabilité.

4.3.2 Le Rôle du Point de Conflit.

Deux modifications peuvent être envisagées en ce qui concerne le point de conflit, la première concernant le déplacement de ce point, et la deuxième concernant l'incertitude.

Dans cette section le point de conflit joue un rôle important, c'est pourquoi on reconsidère le problème de marchandage comme un problème (***B, d***) d'une catégorie Σ_d.

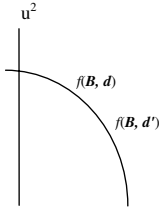
4.3.2.1 La Monotonie du Point de Conflit (Monotonicity).

Imaginons le cas où le point de conflit *se déplace* en faveur d'un certain joueur en lui améliorant la position de conflit (fallback position) alors que les coordonnées des autres joueurs restent inchangées. Est-ce que la solution candidate peut réagir favorablement? D'une manière générale, cette solution doit prévoir qu'un joueur qui perd moins en cas de conflit, par rapport aux autres joueurs, doit être relativement en position plus forte. Dans ce sens on peut affirmer que la propriété de la monotonie du point de conflit peut être considérée comme un *test* pour évaluer les solutions. En supposant que l'ensemble ***B*** est inchangé, on formule cette propriété comme suit :

Définition : La monotonie du point de conflit.

Si $d'_i \geqq d_i$, et pour tous $j \neq i$, $d'_j = d_j$, alors $f_i(\boldsymbol{B, d}) \geqq f_i(\boldsymbol{B, d})$

Remarquons que, si la solution désigne un point Pareto optimal comme le compromis, alors l'amélioration du gain d'un joueur sera forcement accompagnée par la détérioration du gains des autres joueurs [Figure 7].



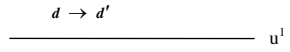


Figure 7 . La propriété de la monotonie du point de conflit.

4.3.2.2 L'Incertitude Sur le Point de Conflit.

Considérons le cas où les joueurs ne sont pas certains en ce qui concerne la position exacte du point de conflit, par conséquent, ce point peut être soit $\boldsymbol{d}^1$ soit $\boldsymbol{d}^2$ avec des probabilités égales. Les joueurs ont le choix entre résoudre le problème aujourd'hui ou alors attendre jusqu'à demain. S'ils attendent jusqu'à demain leur problème revient aujourd'hui à calculer le vecteur $\boldsymbol{x}^1 \equiv [f(\boldsymbol{B,d}^1) + f(\boldsymbol{B, d}^2)]/2$ d'*utilités espérées*, mais s'ils résolvent l'incertain aujourd'hui leur problème revient à déterminer le vecteur $\boldsymbol{x}^2 \equiv f(\boldsymbol{B}, (\boldsymbol{d}^1 + \boldsymbol{d}^2)/2)$ correspondant au point de conflit espéré $(\boldsymbol{d}^1 + \boldsymbol{d}^2)/2$. Si $\boldsymbol{x}^1 \leqq \boldsymbol{x}^2$ les joueurs seront incités à résoudre l'incertitude aujourd'hui, sinon ils attendent jusqu'à demain. On peut imaginer le cas où $\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^2$, dans ce cas les joueurs sont en conflit, pour éviter ce genre de conflit on introduit la condition suivante [Figure 8] :

Définition : La concavité du point de conflit.

Soit $\lambda \in [0, 1]$, $\quad f(\boldsymbol{B}, \lambda\boldsymbol{d}^1 + (1-\lambda).\boldsymbol{d}^2) \geq \lambda f(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{d}^1) + (1-\lambda).f(\boldsymbol{B, d}^2)]$

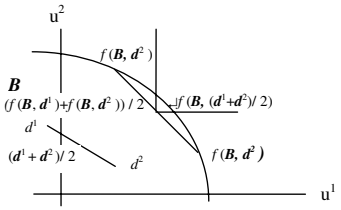


Figure 8. La concavité du point de conflit : le gain du problème $(\boldsymbol{B,}\ (\boldsymbol{d}^1 + \boldsymbol{d}^2)/2)$ domine le gain espéré $(f(\boldsymbol{B, d}^1) + f(\boldsymbol{B, d}^2)/2)$.

4.4 Conclusion.

Le quatrième chapitre exposait l'ensemble des développements et les modifications concernant le problème de marchandage. Différentes solutions, ayant de nouveaux concepts de partage, étaient présentées. Trois solutions parmi elles faisaient l'objet d'une présentation axiomatique. les paramètres présentés, dans ce chapitre, étaient l'ensemble de marchandage et le point de conflit.

Conclusion

Dans ce mémoire on donne une vue d'ensemble sur les différents concepts de solutions qui ont été proposés pour le problème de marchandage. Certaines solutions ne fournissent que des vues partielles. Puisqu'aucune de ces solutions n'est, par elle-même, supérieure aux autres, nous devrons souvent résoudre un même problème économique de plusieurs manières. Par tous ces résultats, qu'ils s'accordent ou non, il se peut que nous parvenions à une meilleure compréhension du contexte économique et social.

Le premier chapitre nous a permis de donner les définitions préliminaires nécessaires pour la compréhension du problème de marchandage. On y présentait la contribution de la théorie économique, et on concluait que le point de solution se trouvait dans certaines limites appelées par pigou "the ranges of practicable bargains". Par ailleurs, on abordait le modèle de Zeuthen et, via un exemple, [Owen (1995)], on introduisait la notion de la menace en présentant les menaces fixes et variables.

Le deuxième chapitre présentait le modèle de marchandage de Nash [Nash (1950 ; 1953]. Nash y proposait deux moyens complémentaires, et il montrait que chaque moyen renforçait l'autre. Il proposait d'abord cinq axiomes pour le jeu de marchandage à deux joueurs avec menace fixe, puis il montrait qu'ils conduisaient à une solution qui faisait appel à une maximisation du produit des utilités individuelles.

Le troisième chapitre étudiait les jeux de marchandage à information incomplète. Harsanyi et Selten introduisaient la notion de "type" où tout type possédait sa propre fonction de paiement, sa propre quantité de ressources, et son propre degré d'information. Dans leur analyse ils faisaient appel à un grand nombre des concepts

spéciaux. Ils supposaient que les joueurs faisaient des distributions des probabilités, et que la matrice $\boldsymbol{p}$ était la même pour les deux joueurs (connaissance commune).

L'axiome qui fait l'objet de débats est l'axiome de l'indépendance des alternatives non pertinentes. Le quatrième chapitre montre que la critique de cet axiome a entraîné son remplacement par d'autres : l'axiome de monotonie et l'axiome de superadditivité. Pour un jeu de marchandage totalement symétrique, les trois solutions, définies par chacune des axiomes mentionnées, sont les mêmes. Dans ce chapitre on présentait, sans entrer dans les détails, d'autres concepts de solution et les développements les plus récentes. On y examinait les paramètres du problème et on présentait les différentes modifications que l'on pouvait appliquer à l'ensemble réalisable et le point de conflit.

Toutes les activités humaines peuvent être regardées comme des cas de marchandages puisque les intérêts ne sont pas identiques. L'économie et la politique représentent des domaines très riches pour l'application des modèles de marchandage. Mais, les "conflits" entre agents économiques ou entre pays sont si complexes que les modèles abordés dans les chapitres précédents ne sont pas complètement suffisants pour résoudre de tels conflits. D'ici vient l'importance d'enrichir l'analyse pour répondre de tels besoins.

Aucun axiome n'est universel, même les nouveaux concepts de partage pourraient faire l'objet d'une modification ou d'un remplacement par d'autres solutions "raisonnables". L'amélioration de l'analyse et la généralisation à des problèmes plus complexes sont toujours possibles. Notre présentation était limitée au problème de marchandage à deux joueurs. Un champ d'analyse riche est celui concernant

l'ensemble de joueurs en généralisant l'analyse pour des problèmes à n joueurs avec information incomplète. D'autres approches pourraient concerner l'introduction du temps, avec des facteurs de décompte. On peut aussi imaginer le cas où l'ensemble réalisable n'est pas convexe, ou le cas où les joueurs peuvent changer leurs demandes au cours du jeu. On peut également envisager le cas où de nouveaux joueurs entrent dans le jeu de marchandage et provoquent une modification des gains. Dans l'environnement des joueurs, il y a beaucoup de paramètres qui n'ont pas encore été modélisés. Par exemple, selon leurs compétences, les joueurs pourraient comprendre et anticiper différemment les circonstances du jeu. Ceci permettrait de prendre un peu plus en compte la complexité du réel.

REFERENCES BIBILIOGRAPHIQUES

Binmore, K. (1992) 'Noncooperative Models of Bargaining', in: R.J. Aumann and S. Hart, eds., *Handbook of Game Theory*. Vol. **1**: 179-225.

Friedman, J.W. (1991) *Game Theory With Application to Economy*. Oxford: University Press.

Harsanyi, J.C. (1956) 'Approaches to The Bargaining Probleme Before and After The Theory of Games : A Critical Discussion of Zeuthen's, Hicks', and Nash's Theories', *Econometrica*, **24**: 144-157.

Harsanyi, J.C. (1995a) 'Games With Incopmlete Information', *American Economic Review*, **85**: 291-303.

Harsanyi, J.C. (1995b) 'A New Theory of Equilibrium Selection for Games With Incomplete Information', *Games And Economic Behavior*, **10**: 318-332.

Harsanyi, J.C. and Selten, R. (1992) 'A Generalized Nash Solution for Two-Person Bargaining Games With Incomplete Information', in: J.P. Mayberry, ed., *Game-Theoretic Models of Cooperation and Conflict*. Boulder and Oxford: Westview Press, pp. 71-131.

Lecostey, S. (1996) *Cours de Théorie des Jeux Non-Coopératifs*. DEA Modilisations Microéconomiques et Applications: Université de Caen.

Mayberry, J.P. (1992a) 'Game-Theoretic Models of Cooperation and Conflict: Introduction', in: J.P. Mayberry, ed., *Game-Theoretic Models of Cooperation and Conflict*. Boulder and Oxford: Westview Press, pp. 1-20.

Mayberry, J.P. (1992b) 'The Notion of "Threat" and Ils Relation to Bargaining Theories', in: J.P. Mayberry, ed., *Game-Theoretic Models of Cooperation and Conflict*. Boulder and Oxford: Westview Press, pp.21-69.

Moulin, H. (1995) 'An Appraisal of Cooperative Game Theory', *Revue d'Economie Politique*, **4**: 617-632.

Nash, J.F. (1950) 'The Bargaining Probleme', *Econometrica*, **28**: 155-162.

Nash, J.F. (1953) 'Tow-Person Cooperative Games', *Econometrica*, **21**: 129-140.

Owen, G. (1995) *Game Theory*, 3ème edn. San Diago, London, Toronto: Harcout Barce ; Academic Press.

Owen, G. (1996) 'Multilinear Extensions and Rubinstein's Solution to The Bargaining Probleme', Séminaires de GEMMA: Université de Caen.

Owen, G. (1997) *Cours de Théorie des Jeux Coopératifs*. DEA Modilisations Microéconomiques et Applications: Université de Caen.

Shubik, M. (1992) *Théorie des Jeux et Sciences Sociales*. Trad. Par Guerrien, B. Paris: Economica.

Taylor, A.D. (1995) *Mathematics and Politics*. New york: Springer-Verlag.

Thomson, W. (1994) 'Cooperative Models of Bargaining', in: R.J. Aumann and S. Hart, eds., *Handbook of Game Theory*. Vol. **2**: 1237-1284.

Ziad, A. (1997) *Cours de Théorie des Jeux Non-Coopératifs*. DEA Modilisations Microéconomiques et Applications: Université de Caen.